Lösung M13-A1

$f(x) = 3x \cdot cos\,(x^2+1)$ Produktregel und Kettenregel erforderlich

---

$f'(uv) = u'v - v'u$
$u = 3x \qquad u' = 3$
$v = cos\,(x^2+1) \qquad v' = -2xsin(x^2+1)$
$f'(x) = 3cos(x^2+1) - 6x^2sin(x^2+1)$

Lösung M13-A2

$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ Potenzregel erforderlich

Zunächst umformen:

$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_2^5 (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$

$\int_2^5 (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_2^5 = \left[2\sqrt{x-1}\right]_2^5 = 2 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot \sqrt{1} = 4 - 2 = 2$

Lösung M13-A3

$(x^2-2) \cdot (e^x+1) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$(x^2-2) = 0 \qquad | \quad +2$
$x^2 = 2 \qquad | \quad \sqrt{\ }$
$x_1 = \sqrt{2}; \quad x_2 = -\sqrt{2}$
$(e^x+1) = 0 \rightarrow \mathbb{L} = \{\}$
$\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Lösung M13-A4

(1) $f(1) = F(1)$
Der Funktionswert $F(1) = 0$. Bei ist ein Tiefpunkt, somit ist auch die erste Ableitung $f(1) = 0$. Die Aussage stimmt.

(2) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.
F hat im angegebenen Intervall einen Wendepunkt. Wendepunkte führen in der ersten Ableitung zu einem Extremstelle, diese Extremstelle wird in der zweiten Ableitung zu einer Nullstelle. Die Aussage stimmt.

(3) $f(F(-2)) > 0$
$F(-2) = 0$, damit ist $f(0)$ zu bestimmen. Das Schaubild hat bei $x_0 = 0$ negative Steigung, damit ist $f(0) < 0$, die Aussage ist falsch.

Lösung M13-A5

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	3	-4	6	
II	-1	3	10	12	$II+I$
III	0	1	1	3	

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	3	-4	6	
II	0	6	6	18	
III	0	1	1	3	III-II:6

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	3	-4	6	
II	0	1	1	3	
III	0	0	0	0	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt. Wir haben ein System von zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Somit ist eine Unbekannte frei zu wählen, wir wählen:

$x_3 = t$

$x_2 + t = 3$

$x_2 = 3 - t$

$x_1 + 3(3-t) - 4t = 6$

$x_1 + 9 - 3t - 7t = 6$

$x_1 = -3 + 10t$

$\mathbb{L} = \{x_1; x_2 x_3 | -3 + 10t; 3 - t; t\}$

Lösung M13-A6

a) E parallel zu g:

Eine Gerade steht dann senkrecht auf einer Ebene, wenn das Skalarprodukt aus Richtungsvektor der Geraden und Normalenvektor der Ebene 0 ergibt.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$$

b) Abstand von g und E:

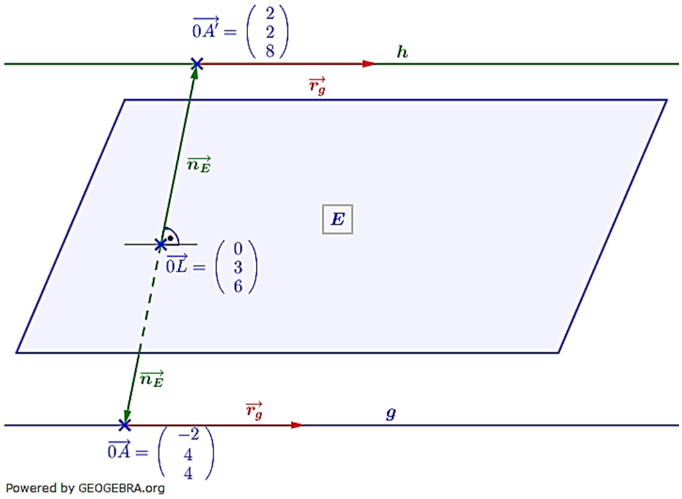
Da die Gerade parallel zur Ebene verläuft, haben alle Punkte der Geraden denselben Abstand von E, Wir berechnen diesen Abstand über den Aufpunkt von g und der HNF von E.

HNF: $\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 9}{\sqrt{4+1+4}} = 0$

Aufpunkt $\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$ von g einsetzen:

$$d(e; g) = \frac{|2 \cdot (-2) - 4 + 2 \cdot 4 - 9|}{3} = \frac{|-9|}{3} = 3$$

c) Gleichung einer Spiegelgeraden h:
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. In Aufgabenteil b) haben wir festgestellt, dass der Abstand der Geraden g zur Ebene E $3\,LE$ ist. Also muss auch der Abstand der gespiegelten Gerade h zur Ebene E ebenfalls $3\,LE$ sein.
Aufgabenteil b) ergab auch, dass $|\overrightarrow{n_E}| = 3$ ist. Also ist der Punkt A genau eine Länge des Normelanvektors von E entfernt und somit muss auch A' genau eine Länge des Normalenvektors von E entfernt auf der anderen Seite der Ebene liegen.



Die Koordinaten des Punktes A' berechnen sich aus $\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2 \cdot \overrightarrow{AL}$, wobei $|\overrightarrow{AL}| = |\overrightarrow{n_E}| = 3$ ist.
Leider wissen wir nicht, ob der Normalenvektor in Richtung des Punktes A senkrecht auf der Ebene steht oder aber in Richtung des Punktes A'.
Eine einfache Lösung dies festzustellen ist die, dass wir die Koordinaten des Lotfußpunktes L aus $\overrightarrow{0L} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{n_E}$ bilden und dann mit dem Ergebnis eine Punktprobe mit E machen.

$$\overrightarrow{0L} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Punktprobe mit E:

$$2 \cdot 0 - 3 + 2 \cdot 6 \stackrel{?}{=} 9; \quad 9 = 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in E$$

$$\overrightarrow{0A'} = \overrightarrow{0A} + 2 \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung M13-A7

a) A: „Von zehn Überraschungseiern enthalten nur die beiden letzten Eier eine Figur:
$P(A) = 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$

b) Abbildung (I) ist das Histogramm des beschriebenen Versuchs.
Abbildung (II) ist kein Histogramm einer Binomialverteilung, die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist größer als 1.
Abbildung (III): Der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ des beschriebenen Versuchs ist $\mu = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Bei Abbildung (III) liegt dieses Maximum jedoch bei 5.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de