Abitur-Musteraufgaben Integral und Stammfunktion (Pflichtteil) ab 2019

Lösung M01

$f(x) = 3e^{-2x} + \frac{1}{2x}$ Summenregel, Potenzregel, lineare Substitution

---

$$F(x) = \int \left(3e^{-2x} + \frac{1}{2x}\right) dx$$

$$F(x) = \frac{3e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2} ln(x) + C = -\frac{3}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} ln(x) + C$$

Lösung M02

$f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ Summenregel, Potenzregel

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} x^2 + C$$

$0 = -1 + \frac{1}{2} + C$ | Punktprobe mit $P(1|0)$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2}$$

Lösung M03

$F(x) = ln\,(1 + x^2)$ Stammfunktion von $f(x) = 2 \cdot \frac{x}{1+x^2}$

Hinweis:
Zur Integralbildung von $f(x)$ ist nicht-lineare Substitution erforderlich. Da dies nicht zum Lehrumfang der Kursstufe gehört, kann der Nachweis nur durch die erste Ableitung von $F(x)$ erbracht werden.

$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = 2 \cdot \frac{x}{1+x^2} = f(x)$ **q.e.d.**

Lösung M04

$\int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx$ Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist der $ln\,(x)$

$$\int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx = [3 \cdot ln(x) - x]_1^e = 3 \cdot ln(e) - e - (3 \cdot ln(1) - 1) = 3 - e + 1$$
$$= 4 - e$$

Lösung M05

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(2x) + 1) dx$ Summenregel, Potenzregel, trigonometrische Regel

---

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(2x) + 1) dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) + x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2}\cos(0) + 0\right)$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Lösung M06

$\int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}} dx$ Potenzregel erforderlich

$\int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}} dx = [8\sqrt{x}]_z^4 = 8 \cdot \sqrt{4} - 8 \cdot \sqrt{z}$

$\lim\limits_{z \to 0} 8 \cdot \sqrt{z} = 0$

Wegen $\lim\limits_{z \to 0} 8 \cdot \sqrt{z} = 0$ ist $\lim\limits_{z \to 0} \int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}} dx = 16$

Der Flächeninhalt ist endlich und beträgt $16\ FE$.

Lösung M07

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x-1}$ lineare Substitution

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{2} \cdot e^{2x-1}\right) dx = \frac{e^{2x-1}}{2 \cdot 2} + C = \frac{1}{4} e^{2x-1} + C$$

Punktprobe mit $P\left(\frac{1}{2} \middle| 1\right)$:

$1 = \frac{1}{4} e^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} + C = \frac{1}{4} + C \qquad | \quad -\frac{1}{4}$

$C = \frac{3}{4}$

$F(x) = \frac{1}{4} e^{2x-1} + \frac{3}{4}$

Lösung M08

$f(x) = 5 \cdot e^{3x} - \frac{5}{x^4}$ Potenzregel und lineare Substitution

---

$$F(x) = \int \left(5 \cdot e^{3x} - \frac{5}{x^4}\right) dx = \frac{5}{3} \cdot e^{3x} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + C = \frac{5}{3} \cdot \left(e^{3x} + \frac{1}{x^3}\right) + C$$

Lösung M09

$\int_0^{\frac{5}{2} \cdot ln(2)} e^{3x} dx$ lineare Substitution

---

$$\int_0^{\frac{5}{2} \cdot ln(2)} e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x}\right]_0^{\frac{5}{2} ln(2)} = \frac{1}{3} e^{3 \cdot \frac{5}{2} ln(2)} - \frac{1}{3} e^0 = \frac{1}{3} \cdot \left(e^{ln(2) \cdot \frac{15}{2}} - 1\right) = \frac{1}{3}(2^7 \cdot \sqrt{2} - 1)$$

Lösung M10

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - sin(x)) dx$ Potenzregel und trigonometrische Regeln

---

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - sin(x)) dx = [8x + \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (0 + 1)$$

$$= 4\pi - 1$$

Lösung M11

$f(x) = 2x^2 + 5x - 3 - \frac{4}{\sqrt{x}}$ Potenzregel

$F(x) = \int \left(2x^2 + 5x - 3 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x - 8\sqrt{x} + C$

Lösung M12

$f(x) = -2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ trigonometrische Regeln

---

$F(x) = \int \left(-2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx = 4\,cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C$

Punktprobe mit $P(\pi|1)$:

$1 = 4\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$

$C = 1$ | wegen $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$F(x) = 4\,cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

Lösung M13

$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ Potenzregel erforderlich

Zunächst umformen:

$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int_2^5 (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$

$\int_2^5 (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_2^5 = \left[2\sqrt{x-1}\right]_2^5 = 2 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot \sqrt{1} = 4 - 2 = 2$