Abitur-Musteraufgaben Integral und Stammfunktion (Pflichtteil) ab 2019

Aufgabe M01

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3e^{-2x} + \frac{1}{2x}$.
Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M02

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$.
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f, deren Schaubild den Punkt $P(1|0)$ enthält.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M03

Zeigen Sie, dass $F(x) = ln\,(1 + x^2)$ eine Stammfunktion von $f(x) = 2 \cdot \frac{x}{1+x^2}$ ist.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M04

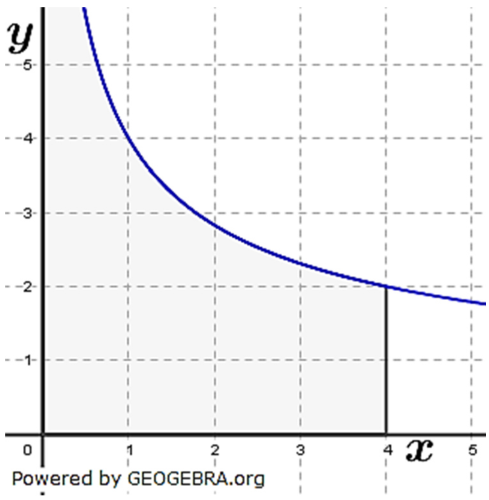
Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx$.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M05

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(2x) + 1) dx$.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M06

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ schließt mit der x-Achse, der Geraden $x = 4$ und der y-Achse eine nach oben offene Fläche ein (siehe Skizze).
Untersuchen Sie, ob diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt hat und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.
(Quelle Landesbildungsserver BW)



Aufgabe M07

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x-1}$.
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $P\left(\frac{1}{2}\middle|1\right)$ geht.

Aufgabe M08

Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot e^{3x} - \frac{5}{x^4}$.

Abitur-Musteraufgaben Integral und Stammfunktion (Pflichtteil) ab 2019

Aufgabe M09

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{5}{2}\cdot ln\,(2)} e^{3x}dx$.

Aufgabe M10

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8-sin(x))dx$.

Aufgabe M11

Berechnen Sie eine Stammfunktion zu $f(x)=2x^2+5x-3-\frac{4}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe M12

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von f mit $f(x)=-2\cdot sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, deren Graph durch den Punkt $P(\pi|1)$ verläuft.

Aufgabe M13

Berechnen Sie das Integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$.

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

Abitur-Musteraufgaben Integral und Stammfunktion (Pflichtteil) ab 2019

Lösung M01

$f(x) = 3e^{-2x} + \frac{1}{2x}$ Summenregel, Potenzregel, lineare Substitution

---

$$F(x) = \int \left(3e^{-2x} + \frac{1}{2x}\right) dx$$

$$F(x) = \frac{3e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2} ln(x) + C = -\frac{3}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} ln(x) + C$$

Lösung M02

$f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ Summenregel, Potenzregel

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$0 = -1 + \frac{1}{2} + C$ | Punktprobe mit $P(1|0)$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

Lösung M03

$F(x) = ln\,(1 + x^2)$ Stammfunktion von $f(x) = 2 \cdot \frac{x}{1+x^2}$

Hinweis:
Zur Integralbildung von $f(x)$ ist nicht-lineare Substitution erforderlich. Da dies nicht zum Lehrumfang der Kursstufe gehört, kann der Nachweis nur durch die erste Ableitung von $F(x)$ erbracht werden.

$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = 2 \cdot \frac{x}{1+x^2} = f(x)$ **q.e.d.**

Lösung M04

$\int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx$ Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist der $ln\,(x)$

$$\int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx = [3 \cdot ln(x) - x]_1^e = 3 \cdot ln(e) - e - (3 \cdot ln(1) - 1) = 3 - e + 1$$
$$= 4 - e$$

Lösung M05

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(2x) + 1) dx$ Summenregel, Potenzregel, trigonometrische Regel

---

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin(2x) + 1) dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) + x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2}\cos(0) + 0\right)$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Lösung M06

$\int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}}dx$ Potenzregel erforderlich

$\int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}}dx = \left[8\sqrt{x}\right]_z^4 = 8\cdot\sqrt{4} - 8\cdot\sqrt{z}$

$\lim\limits_{z\to 0} 8\cdot\sqrt{z} = 0$

Wegen $\lim\limits_{z\to 0} 8\cdot\sqrt{z} = 0$ ist $\lim\limits_{z\to 0}\int_z^4 \frac{4}{\sqrt{x}}dx = 16$

Der Flächeninhalt ist endlich und beträgt $16\ FE$.

Lösung M07

$f(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x-1}$ lineare Substitution

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{2}\cdot e^{2x-1}\right)dx = \frac{e^{2x-1}}{2\cdot 2} + C = \frac{1}{4}e^{2x-1} + C$$

Punktprobe mit $P\left(\frac{1}{2}\middle|1\right)$:

$1 = \frac{1}{4}e^{2\cdot\frac{1}{2}-1} + C = \frac{1}{4} + C \qquad | \quad -\frac{1}{4}$

$C = \frac{3}{4}$

$F(x) = \frac{1}{4}e^{2x-1} + \frac{3}{4}$

Lösung M08

$f(x) = 5\cdot e^{3x} - \frac{5}{x^4}$ Potenzregel und lineare Substitution

---

$$F(x) = \int\left(5\cdot e^{3x} - \frac{5}{x^4}\right)dx = \frac{5}{3}\cdot e^{3x} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^3} + C = \frac{5}{3}\cdot\left(e^{3x} + \frac{1}{x^3}\right) + C$$

Lösung M09

$\int_0^{\frac{5}{2}\cdot ln\,(2)} e^{3x}dx$ lineare Substitution

---

$$\int_0^{\frac{5}{2}\cdot ln\,(2)} e^{3x}dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^{\frac{5}{2}ln\,(2)} = \frac{1}{3}e^{3\cdot\frac{5}{2}ln\,(2)} - \frac{1}{3}e^0 = \frac{1}{3}\cdot\left(e^{ln(2)\cdot\frac{15}{2}} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(2^7\cdot\sqrt{2} - 1\right)$$

Lösung M10

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8 - sin(x))dx$ Potenzregel und trigonometrische Regeln

---

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8 - sin(x))dx = [8x + \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (0 + 1)$$
$$= 4\pi - 1$$

Lösung M11

$f(x) = 2x^2 + 5x - 3 - \frac{4}{\sqrt{x}}$ Potenzregel

$F(x) = \int \left(2x^2 + 5x - 3 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x - 8\sqrt{x} + C$

Lösung M12

$f(x) = -2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ trigonometrische Regeln

---

$F(x) = \int \left(-2 \cdot sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx = 4\,cos\left(\frac{1}{2}x\right) + C$

Punktprobe mit $P(\pi|1)$:

$1 = 4\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$

$C = 1$ | wegen $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$F(x) = 4\,cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

Lösung M13

$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ Potenzregel erforderlich

Zunächst umformen:

$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int_2^5 (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$

$\int_2^5 (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_2^5 = \left[2\sqrt{x-1}\right]_2^5 = 2 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot \sqrt{1} = 4 - 2 = 2$