Lösung M01

Aufgabe zum Erwartungswert. Zu berechnen ist die Versicherungsprämie, damit der Versicherung ein Gewinn von pro Police verbleibt.
Die Zufallsvariable X stellt den Auszahlungsbetrag bei einem Schaden bzw. die Versicherungsprämie dar:

x_i	30000 €	10000 €	2000 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{5}{1000}$	$\frac{25}{1000}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	30 €	50 €	50€
$\sum_1^i x_i \cdot P(X = x_i)$	$30\ +$	$50\ +$	50

$E(X) = 30 + 50 + 50 = 130{,}00$ €

Die Versicherung muss auf lange Sicht gesehen im Schnitt $130{,}00$ € pro Schadensfall ausbezahlen. Da sie $100{,}00$ € pro Police verdienen will, muss sie eine Jahresprämie von $230{,}00$ € erheben.

Lösung M02

Bernoulliexperiment mit Stichprobenumfang $n = 3$ und Wahrscheinlichkeit für Erfolg von $p = 0{,}8$.

a) A: „Der Biathlet trifft nur beim ersten Schuss."
$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}032$
Der Biathlet trifft mit $3{,}2\ \%$ *nur beim ersten Schuss.*
B: „Der Biathlet trifft mit mindestens einem Schuss."
Gegenereignis:
$\overline{B}$: „Der Biathlet trifft kein einziges mal."
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}2^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$
Der Biathlet trifft mit $99{,}2\ \%$ *mindestens einmal.*

b) $P(A) = \binom{10}{a} \cdot b^7 \cdot 0{,}2^c$
$a = 7;\ \ b = 0{,}8;\ \ c = 3$
Das Ereignis beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei $n = 10$ *Versuchen bei* $b = p = 0{,}8$ *Trefferwahrscheinlichkeit der Erfolg genau* $a = k = 7$ *Mal eintritt.*

Lösung M03

a) $P(6) = \frac{1}{6}$.

X	3 Sechsen	2 Sechsen	1 Sechs
Häufigkeit	$\binom{3}{3} = 1$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{1} = 3$
$P(X)$	$1 \cdot \frac{1}{6}^3$	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}$	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$

X kann pro Spiel die Werte 1, 2 oder 3 annehmen.
$P(X = 3) = \frac{1}{216};\ \ P(X = 2) = \frac{15}{216};\ \ P(X = 1) = \frac{75}{216}$

b) faires Spiel?
Aufgabe zum Erwartungswert.

x_i	$3-1\,\$$	$2-1\,\$$	$1-1\,\$$	$-1\,\$$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$
$x_i \cdot P(X=x_i)$	$\frac{2}{216}\,\$$	$\frac{15}{216}\,\$$	$0\,\$$	$-\frac{125}{216}\,\$$
$\sum_1^i x_i \cdot P(X=x_i)$	$\frac{2}{216}\ +$	$\frac{15}{216}\ +$	$0\ +$	$-\frac{125}{216}$

$E(X) = -\frac{108}{216}\,\$ = -0{,}5\,\$$

Das Spiel ist nicht fair, der Spieler verliert auf lange Sicht gesehen $0{,}5\,\$$ *pro Spiel.*

Lösung M04

A: „Genau eine Herzkarte liegt auf dem Tisch."

$P(Kreuz) = \frac{4}{4+n}$; $\quad P(Herz) = \frac{n}{4+n}$

$P(A) = \{(Kreuz, Herz); (Herz, Kreuz)\}$

Es ist Ziehen ohne Zurücklegen:

$P(A) = 2 \cdot \frac{4}{4+n} \cdot \frac{n}{3+n} = \frac{8n}{(4+n)(3+n)}$

n für $P(A) = \frac{8}{15}$:

$\frac{8n}{(4+n)(3+n)} = \frac{8}{15} \quad | \quad \cdot \frac{15}{8}$

$\frac{15n}{(4+n)(3+n)} = 1 \quad | \quad \cdot (4+n)(3+n)$

$15n = (4+n)(3+n) = 12 + 7n + n^2 \quad | \quad -15n$

$n^2 - 8n + 12 = 0$

$n_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$

$n_1 = 6; \quad n_2 = 2$

Bei 6 *oder* 2 *Herzkarten beträgt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses* A $\frac{8}{15}$.

Lösung M05

Mehrstufiges Zufallsexperiment mit $P(weiß) = \frac{2}{5}$ und $P(schwarz) = \frac{3}{5}$ im ersten Zug.

a) A: „Mindestens eine der Kugeln ist weiß"
$\overline{A}$: „Beide Kugeln sind schwarz"

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(schwarz, schwarz) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{25}$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{16}{25} = 64\,\%$.

b) Wie a), jedoch mit n weißen Kugeln, dann ist $P(schwarz) = \frac{3}{3+n}$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(schwarz, schwarz) = 1 - \frac{3}{3+n} \cdot \frac{3}{3+n} = \frac{(3+n)^2 - 9}{(3+n)^2}$

$\frac{(3+n)^2-9}{(3+n)^2} \geq 0{,}91 \quad | \quad \cdot (3+n)^2$

$(3+n)^2 - 9 \geq 0{,}91 \cdot (3+n)^2 \quad | \quad -0{,}91 \cdot (3+n)^2$

$0{,}09 \cdot (3+n)^2 - 9 \geq 0 \quad | \quad +9;\ :0{,}09$

$(3+n)^2 \geq 100 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$|3+n| \geq 10$

$n_1 \geq 7; \quad n_2 \geq -13$

Es müssen mindestens 7 *weiße Kugeln sein.*

Lösung M06

a) Abbildung 1 zeigt die Verteilung von X an.
$E(X) = \mu = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}75 = 6$
Im Erwartungswert der Binomialverteilung ist die Wahrscheinlichkeit am größten (Maximum).

b) $P(3 < X < 6) = P(4) + P(5) = 0{,}08 + 0{,}21 = 0{,}29$
$P(X \neq 8) = 1 - P(X = 8) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

Lösung M07

Bernoulli-Experiment mit $n = 7,\ p = 0{,}04$ für Linkshänder.

a) A: „Unter den ausgewählten Personen ist kein Linkshänder."
$P(A) = B_{7;0{,}96}(X = 0) = \binom{7}{7} \cdot 0{,}96^7 \cdot 0{,}04^0$

b) B: „Unter den ausgewählten Personen ist mindestens ein Linkshänder."
$P(B) = B_{7;0{,}04}(X \geq 1) = 1 - B_{7;0{,}04}(X = 0) = 1 - \binom{7}{0} 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^7$

Lösung M08

$P(rot) = \frac{5}{12}$; $P(blau) = \frac{7}{12}$ jeweils im ersten Zug.

a) A: „Alle drei Kugeln sind blau".
$P(A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{210}{1320} = 0{,}1591 \approx 15{,}9\,\%$

b) B: „Eine Kugel ist rot, zwei Kugeln sind blau.".
$P(B) = \binom{3}{1} \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = 3 \cdot \frac{210}{1320} = 0{,}4773 \approx 47{,}7\,\%$

c) C: „Höchstens eine Kugel ist rot".
Die Zufallsvariable X stellt die Anzahl roter Kugeln dar.
$P(C) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + P(B) = \frac{210+630}{1320} = 0{,}6363 \approx 63{,}6\,\%$

Lösung M09

x_i	$1\,€$	$4\,€$	$9\,€$	$49\,€$	$99\,€$
$P(X = x_i)$	$\frac{800}{5000}$	$\frac{150}{5000}$	$\frac{48}{5000}$	$\frac{1}{5000}$	$\frac{1}{5000}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}16\,€$	$0{,}12\,€$	$0{,}086\,€$	$0{,}0098\,€$	$0{,}0198\,€$
$\sum_1^i x_i \cdot P(X = x_i)$	$0{,}16\,€ +$	$0{,}12€ +$	$0{,}086€ +$	$0{,}0098\,€ +$	$0{,}0198\,€$

$E(X) = 0{,}3956\,€ \approx 0{,}40\,€$
Das Unternehmen kann erwarten, dass es pro Los ca. $0{,}40\,€$ *verdient, falls es alle Lose verkauft.*

Lösung M10

$P(richtig) = \frac{1}{3}$ pro Frage.

1) A: „Zwei richtige Antworten".
$P(A) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27} = 0{,}2963 \approx 29{,}6\,\%$

2) B: „nur eine richtige Antwort".
$P(B) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81} = 0{,}3951 \approx 39{,}5\,\%$

3) C: „mindestens eine Antwort".
$P(C) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} = 0{,}8025 \approx 80{,}3\,\%$

Lösung M11

Bernoulli-Experiment mit $n = 3$, $p = 0{,}9$ für Treffer.

a) A: „Mit den ersten drei Würfen dreimal treffen".

$P(A) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}0729 \approx 7{,}3\,\%$

b) $P(A) = 0{,}1^5$:

A: „Bei 5 Würfen genau fünfmal Treffen bei $p = 0{,}1$ für Treffer."

$P(B) = \binom{30}{25} 0{,}9^{25} \cdot 0{,}1^5$

B: „Bei 30 Würfen genau fünfmal Treffen bei $p = 0{,}1$ für Treffer."

Lösung M12

Bernoulli-Experiment mit $n = 3$, $p = 0{,}9$ für Heilung.

A: „Mindestens zwei der drei Tiere werden gesund".

$P(A) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 + \binom{3}{3} \cdot 0{,}9^3 = 3 \cdot 0{,}081 + 0{,}729 = 0{,}972 = 97{,}2\,\%$

Lösung M13

a) A: „Von zehn Überraschungseiern enthalten nur die beiden letzten Eier eine Figur:

$P(A) = 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$

b) Abbildung (I) ist das Histogramm des beschriebenen Versuchs.

Abbildung (II) ist kein Histogramm einer Binomialverteilung, die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist größer als 1.

Abbildung (III): Der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ des beschriebenen Versuchs ist $\mu = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Bei Abbildung (III) liegt dieses Maximum jedoch bei 5.