Abitur-Musteraufgaben Stochastik (Pflichtteil) ab 2019

Aufgabe M01

Ein Auto hat einen Wert von 30000 € und soll von einer Versicherung jährlich gegen Schaden versichert werden.
Die Autoversicherung erwartet, dass bei 10000 versicherten Autos des gleichen Typs pro Jahr folgende Schadensfälle passieren:

- 10 Versicherungsfälle mit einem Totalschaden;
- 50 Versicherungsfälle mit einem durchschnittlichen Schaden von 10000 €;
- 250 kleinere Schäden mit einem durchschnittlichen Schaden von 2000 €.

Berechnen Sie, welchen Versicherungsbeitrag die Versicherung jährlich anbieten sollte, wenn Sie pro Kunden einen Gewinn von 100 € (ohne Verwaltungskosten) erwirtschaften möchte.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgaben M02

Ein Biathlet trifft erfahrungsgemäß bei $80\,\%$ seiner Schüsse die Scheibe.

a) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit er bei drei Schüssen
- nur mit dem ersten Schuss,
- mindestens einen Schuss

trifft.

b) Für ein Ereignis A gilt: $P(A) = \binom{10}{a} \cdot b^7 \cdot 0{,}2^c$.

Geben Sie geeignete Werte für a, b und c an. Beschreiben Sie das Ereignis A in Worten.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgaben M03

Ein Chuck-your-luck ist ein Würfelspiel aus Amerika. Der Spieler setzt einen Dollar und würfelt dann dreimal. Für jede Sechs erhält er von der Bank einen Dollar.

a) Die Zufallsvariable X soll den Gewinn des Spielers angeben. Geben Sie die möglichen Werte von X und ihre jeweilige Wahrscheinlichkeit an.

b) Untersuchen Sie, ob das Spiel fair ist.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M04

Auf einem Tisch liegen verdeckt 4 Kreuz-Karten und n Herz-Karten.
Es werden zwei Karten aufgedeckt.
Berechnen Sie, für welche Werte von n die Wahrscheinlichkeit, dass unter den aufgedeckten Karten genau eine Herzkarte ist, gleich $\frac{8}{15}$ ist.
(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M05

In einem Behälter befinden sich 2 weiße und 3 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln weiß ist.

b) Berechnen Sie, wie viele weiße Kugeln sich in dem Behälter befinden müssten, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, $0{,}91$ betragen hätte.

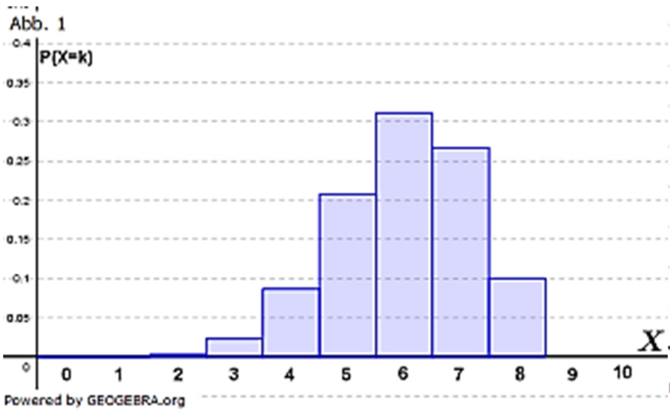
(Quelle Landesbildungsserver BW)

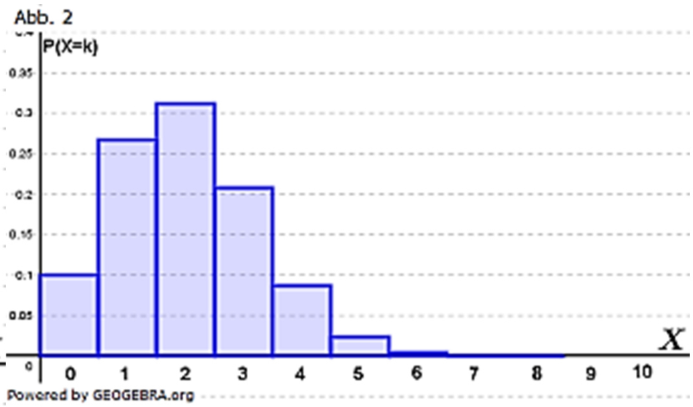
Aufgabe M06

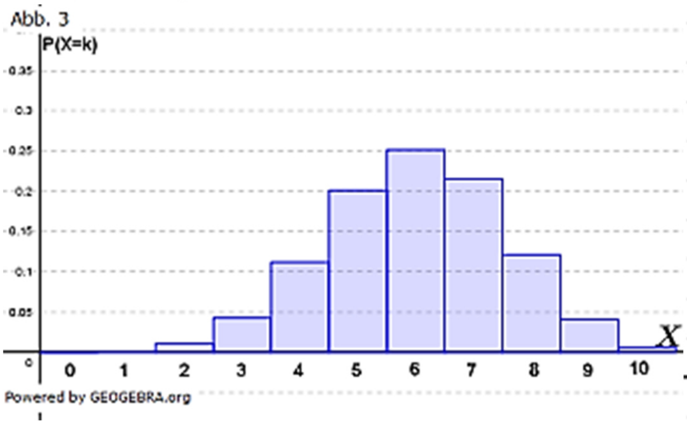
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = 0{,}75$.

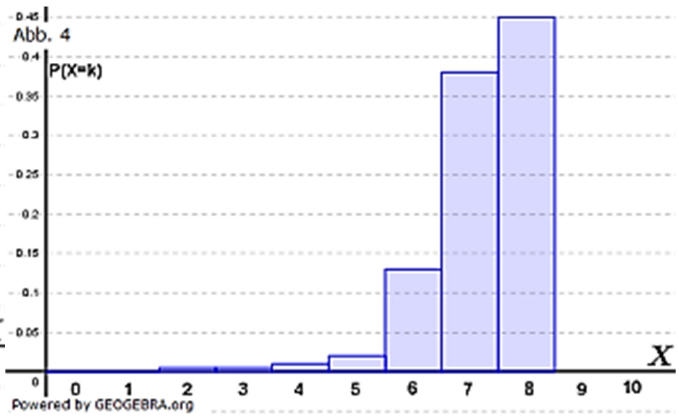
a) Geben Sie an, welche der Abbildungen die Verteilung von X zeigt. Begründen Sie ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der gewählten Abbildung näherungsweise: $P(3 < X < 6)$ und $P(X \neq 8)$.









(Quelle Landesbildungsserver BW)

Aufgabe M07

Unter 100 Personen einer Bevölkerung sind durchschnittlich 4 Personen Linkshänder.

Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass unter 7 zufällig ausgewählten Personen

a) kein Linkshänder ist.

b) mindestens ein Linkshänder ist.

Aufgabe M08

In einer Urne sind 5 rote und 7 blaue gleichartige Kugeln.
Es werden nacheinander 3 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen.
Welche Wahrscheinlichkeiten haben die folgenden Ereignisse?

a) Alle drei Kugeln sind blau.
b) Eine Kugel ist rot, zwei Kugeln sind blau.
c) Höchstens eine Kugel ist rot.

Aufgabe M09

In einer Lotterie werden 5000 Lose zu je $1{,}00$ € verkauft. Es gibt 4000 Nieten, 800 Gewinne zu 2 €, 150 Gewinne zu je 5 €, 48 Gewinne zu je 10 €, einen Gewinn zu 50 € und einen Gewinn zu 100 €.
Die Zufallsvariable X beschreibt die möglichen Gewinne des Lotterieunternehmens bei einem Los.
Stellen Sie eine Tabelle auf mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen. Berechnen Sie den Erwartungswert.
Erläutern Sie die Bedeutung dieses Erwartungswertes.

Aufgabe M10

Bei einem Multiple-Choice-Test kann man bei jeder Frage unter drei möglichen Antworten wählen, von denen jeweils nur eine richtig ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Testperson, die keine der Antworten weiß, bei 4 Fragen:
(1) genau 2 Antworten (2) nur eine Antwort (3) mindestens eine Antwort richtig rät?

Aufgabe M11

Ein Basketball-Spieler übt Freiwürfe. Erfahrungsgemäß trifft er im Training bei $90\,\%$ seiner Würfe.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mit den ersten drei Würfen dreimal?
b) Beschrieben Sie bei diesem Zufallsexperiment ein Ereignis A und ein Ereignis B, für die gilt:
   $P(A) = 0{,}1^5$, $\quad P(B) = \binom{30}{25} \cdot 0{,}9^{25} \cdot 0{,}1^5$

Aufgabe M12

Ein Tierarzt behandelt eine Infektionskrankheit bei Kühen mit einem Antibiotikum, das nach langjähriger Erfahrung in $90\,\%$ aller Fälle zur Heilung führt.
Auf einem Bauernhof werden drei kranke Tiere mit diesem Medikament behandelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der drei Tiere gesund werden?

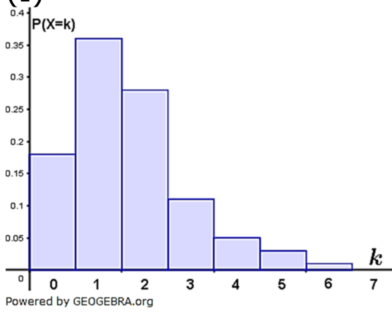
Aufgabe M13

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur $25\,\%$ beträgt.

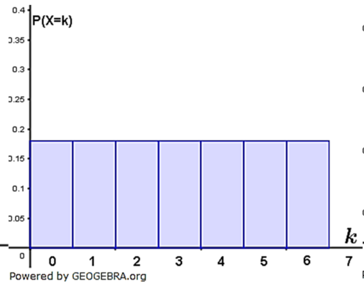
a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen X dar:

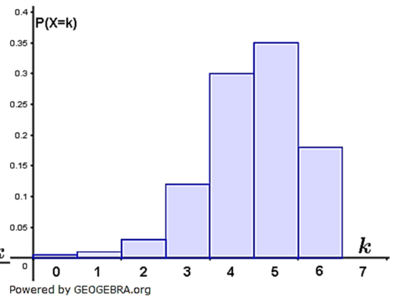
(I)



(II)



(III)



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist.
Begründen Sie, dass die beiden anderen dies nicht sind.

(Quelle Landungsbildungsserver BW)

Lösung M01

Aufgabe zum Erwartungswert. Zu berechnen ist die Versicherungsprämie, damit der Versicherung ein Gewinn von pro Police verbleibt.
Die Zufallsvariable X stellt den Auszahlungsbetrag bei einem Schaden bzw. die Versicherungsprämie dar:

x_i	30000 €	10000 €	2000 €
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{5}{1000}$	$\frac{25}{1000}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	30 €	50 €	50€
$\sum_1^i x_i \cdot P(X = x_i)$	$30\ +$	$50\ +$	50

$E(X) = 30 + 50 + 50 = 130{,}00$ €

Die Versicherung muss auf lange Sicht gesehen im Schnitt $130{,}00$ € pro Schadensfall ausbezahlen. Da sie $100{,}00$ € pro Police verdienen will, muss sie eine Jahresprämie von $230{,}00$ € erheben.

Lösung M02

Bernoulliexperiment mit Stichprobenumfang $n = 3$ und Wahrscheinlichkeit für Erfolg von $p = 0{,}8$.

a) A: „Der Biathlet trifft nur beim ersten Schuss."
$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}032$
Der Biathlet trifft mit $3{,}2\ \%$ *nur beim ersten Schuss.*
B: „Der Biathlet trifft mit mindestens einem Schuss."
Gegenereignis:
$\overline{B}$: „Der Biathlet trifft kein einziges mal."
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}2^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$
Der Biathlet trifft mit $99{,}2\ \%$ *mindestens einmal.*

b) $P(A) = \binom{10}{a} \cdot b^7 \cdot 0{,}2^c$
$a = 7;\ \ b = 0{,}8;\ \ c = 3$
Das Ereignis beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei $n = 10$ *Versuchen bei* $b = p = 0{,}8$ *Trefferwahrscheinlichkeit der Erfolg genau* $a = k = 7$ *Mal eintritt.*

Lösung M03

a) $P(6) = \frac{1}{6}$.

X	3 Sechsen	2 Sechsen	1 Sechs
Häufigkeit	$\binom{3}{3} = 1$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{1} = 3$
$P(X)$	$1 \cdot \frac{1}{6}^3$	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}$	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$

X kann pro Spiel die Werte 1, 2 oder 3 annehmen.
$P(X = 3) = \frac{1}{216};\ \ P(X = 2) = \frac{15}{216};\ \ P(X = 1) = \frac{75}{216}$

b) faires Spiel?
Aufgabe zum Erwartungswert.

x_i	$3-1\,\$$	$2-1\,\$$	$1-1\,\$$	$-1\,\$$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$
$x_i\cdot P(X=x_i)$	$\frac{2}{216}\,\$$	$\frac{15}{216}\,\$$	$0\,\$$	$-\frac{125}{216}\,\$$
$\sum_1^i x_i\cdot P(X=x_i)$	$\frac{2}{216}+$	$\frac{15}{216}+$	$0+$	$-\frac{125}{216}$

$E(X)=-\frac{108}{216}\,\$=-0{,}5\,\$$
Das Spiel ist nicht fair, der Spieler verliert auf lange Sicht gesehen $0{,}5\,\$$ pro Spiel.

Lösung M04

A: „Genau eine Herzkarte liegt auf dem Tisch."
$P(Kreuz)=\frac{4}{4+n}$; $P(Herz)=\frac{n}{4+n}$
$P(A)=\{(Kreuz,Herz);(Herz,Kreuz)\}$
Es ist Ziehen ohne Zurücklegen:
$P(A)=2\cdot\frac{4}{4+n}\cdot\frac{n}{3+n}=\frac{8n}{(4+n)(3+n)}$
n für $P(A)=\frac{8}{15}$:

$\frac{8n}{(4+n)(3+n)}=\frac{8}{15}$ | $\cdot\frac{15}{8}$
$\frac{15n}{(4+n)(3+n)}=1$ | $\cdot(4+n)(3+n)$
$15n=(4+n)(3+n)=12+7n+n^2$ | $-15n$
$n^2-8n+12=0$
$n_{1,2}=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm 2$
$n_1=6$; $n_2=2$

Bei 6 oder 2 Herzkarten beträgt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A $\frac{8}{15}$.

Lösung M05

Mehrstufiges Zufallsexperiment mit $P(weiß)=\frac{2}{5}$ und $P(schwarz)=\frac{3}{5}$ im ersten Zug.

a) A: „Mindestens eine der Kugeln ist weiß"
$\overline{A}$: „Beide Kugeln sind schwarz"
$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(schwarz,schwarz)=1-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{16}{25}$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{16}{25}=64\,\%$.

b) Wie a), jedoch mit n weißen Kugeln, dann ist $P(schwarz)=\frac{3}{3+n}$
$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(schwarz,schwarz)=1-\frac{3}{3+n}\cdot\frac{3}{3+n}=\frac{(3+n)^2-9}{(3+n)^2}$

$\frac{(3+n)^2-9}{(3+n)^2}\geq 0{,}91$ | $\cdot(3+n)^2$
$(3+n)^2-9\geq 0{,}91\cdot(3+n)^2$ | $-0{,}91\cdot(3+n)^2$
$0{,}09\cdot(3+n)^2-9\geq 0$ | $+9;\ :0{,}09$
$(3+n)^2\geq 100$ | $\sqrt{\ }$
$|3+n|\geq 10$
$n_1\geq 7$; $n_2\geq -13$
Es müssen mindestens 7 weiße Kugeln sein.

Lösung M06

a) Abbildung 1 zeigt die Verteilung von X an.
$E(X) = \mu = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}75 = 6$
Im Erwartungswert der Binomialverteilung ist die Wahrscheinlichkeit am größten (Maximum).

b) $P(3 < X < 6) = P(4) + P(5) = 0{,}08 + 0{,}21 = 0{,}29$
$P(X \neq 8) = 1 - P(X = 8) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

Lösung M07

Bernoulli-Experiment mit $n = 7,\ \ p = 0{,}04$ für Linkshänder.

a) A: „Unter den ausgewählten Personen ist kein Linkshänder."
$P(A) = B_{7;0{,}96}(X = 0) = \binom{7}{7} \cdot 0{,}96^7 \cdot 0{,}04^0$

b) B: „Unter den ausgewählten Personen ist mindestens ein Linkshänder."
$P(B) = B_{7;0{,}04}(X \geq 1) = 1 - B_{7;0{,}04}(X = 0) = 1 - \binom{7}{0} 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^7$

Lösung M08

$P(rot) = \frac{5}{12};\quad P(blau) = \frac{7}{12}$ jeweils im ersten Zug.

a) A: „Alle drei Kugeln sind blau".
$P(A) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{210}{1320} = 0{,}1591 \approx 15{,}9\ \%$

b) B: „Eine Kugel ist rot, zwei Kugeln sind blau.".
$P(B) = \binom{3}{1} \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = 3 \cdot \frac{210}{1320} = 0{,}4773 \approx 47{,}7\ \%$

c) C: „Höchstens eine Kugel ist rot".
Die Zufallsvariable X stellt die Anzahl roter Kugeln dar.
$P(C) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + P(B) = \frac{210+630}{1320} = 0{,}6363 \approx 63{,}6\ \%$

Lösung M09

x_i	-1 €	1 €	4 €	9 €	49 €	99 €
$P(X = x_i)$	$\frac{4000}{5000}$	$\frac{800}{5000}$	$\frac{150}{5000}$	$\frac{48}{5000}$	$\frac{1}{5000}$	$\frac{1}{5000}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$-0{,}20$ €	$0{,}16$ €	$0{,}12$ €	$0{,}086$ €	$0{,}0098$ €	$0{,}0198$ €
$\sum_1^i x_i \cdot P(X = x_i)$	$-0{,}20€ + 0{,}16\ € + 0{,}12€ + 0{,}086€ + 0{,}0098\ € + 0{,}0198\ €$					

$E(X) = 0{,}1956\ € \approx 0{,}20\ €$
Das Unternehmen kann erwarten, dass es pro Los ca. $0{,}20\ €$ *verdient, falls es alle Lose verkauft.*

Lösung M10

$P(richtig) = \frac{1}{3}$ pro Frage.

1) A: „Zwei richtige Antworten".
$P(A) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27} = 0{,}2963 \approx 29{,}6\ \%$

2) B: „nur eine richtige Antwort".
$P(B) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81} = 0{,}3951 \approx 39{,}5\ \%$

3) C: „mindestens eine Antwort".
$P(C) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} = 0{,}8025 \approx 80{,}3\ \%$

Lösung M11

Bernoulli-Experiment mit $n = 3$, $p = 0{,}9$ für Treffer.

a) A: „Mit den ersten drei Würfen dreimal treffen".

$P(A) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}0729 \approx 7{,}3\,\%$

b) $P(A) = 0{,}1^5$:

A: „Bei 5 Würfen genau fünfmal Treffen bei $p = 0{,}1$ für Treffer."

$P(B) = \binom{30}{25} 0{,}9^{25} \cdot 0{,}1^5$

B: „Bei 30 Würfen genau fünfmal Treffen bei $p = 0{,}1$ für Treffer."

Lösung M12

Bernoulli-Experiment mit $n = 3$, $p = 0{,}9$ für Heilung.

A: „Mindestens zwei der drei Tiere werden gesund".

$P(A) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 + \binom{3}{3} \cdot 0{,}9^3 = 3 \cdot 0{,}081 + 0{,}729 = 0{,}972 = 97{,}2\,\%$

Lösung M13

a) A: „Von zehn Überraschungseiern enthalten nur die beiden letzten Eier eine Figur:

$P(A) = 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$

b) Abbildung (I) ist das Histogramm des beschriebenen Versuchs.

Abbildung (II) ist kein Histogramm einer Binomialverteilung, die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist größer als 1.

Abbildung (III): Der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ des beschriebenen Versuchs ist $\mu = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Bei Abbildung (III) liegt dieses Maximum jedoch bei 5.