Abituraufgaben allgemeinbildendes Gymnasium

Wahlteile Stochastik ab 2019

Inhaltsverzeichnis Wahlteile Stochastik

Abiturprüfungen Wahlteile Stochastik ab 2019

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 01

Aufgabe C1

Der Body-Mass-Index ist eine Maßzahl für die Bewertung des Körpergewichts eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße. Menschen mit einem BMI > 25 gelten laut diesem Index bereits als übergewichtig.
Laut statistischem Bundesamt waren im Jahr 2018 $60\,\%$ der männlichen Bevölkerung und $55\,\%$ der weiblichen Bevölkerung übergewichtig (BMI > 25).

a) Berechnen Sie, die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind genau 6 Männer übergewichtig."
B: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind mehr als die Hälfte übergewichtig."
C: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind nur die ersten drei nicht übergewichtig."

b) Bestimmen Sie, wie groß eine Gruppe weiblicher Personen mindestens sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über $99\,\%$ mindestens eine Frau in der Gruppe übergewichtig ist.

c) In der Gesamtbevölkerung Deutschlands betrug der Anteil der Übergewichtigen im Jahr 2018 laut statistischem Bundesamt $57\,\%$.
Ein Dorf hat 500 Einwohner.
Die Anzahl der Übergewichtigen im Dorf liegt mit etwa $95\,\%$ in dem Intervall $[\mu - 1{,}96\,\sigma,\ \mu + 1{,}96\,\sigma]$.
Bestimmen Sie Grenzen dieses Intervalls.
Ein Sportverein in dem Dorf hat 409 Mitglieder. Der Vereinsvorsitzende behauptet, dass der Anteil der Übergewichtigen in seinem Verein geringer als in der sonstigen Bevölkerung ist.
Um dies zu überprüfen, wird die Nullhypothese H_0: $p \geq 57\,\%$ auf dem Signifikanzniveau $10\,\%$ getestet und das BMI der 40 Mitglieder ermittelt.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung C1

Lösungslogik

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*
Alle drei Ereignisse sind Binomialverteilungen. Aufstellung der jeweiligen Bernoulli-Formel und Berechnung mittels WTR.

b) *Anzahl weiblicher Personen:*
Gesucht wird der Stichprobenumfang n weiblicher Personen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine übergewichtige Person zu finden größer ist als $0{,}99$.
Die zugehörige Bernoulliformel lautet : $B_{n;0,55}(X \geq 1) > 0{,}99$.

c) *Intervallgrenzen für übergewichtige Dorfeinwohner:*
Berechnung der Kennzahlen μ und σ und des $1{,}96\sigma$-Intervalls.
Signifikanztest:
Mit H_0: $p_0 \geq 0{,}57$; und der Gegenhypothese H_1: $p_1 < 0{,}57$ handelt es sich um einen linksseitigen Test mit $\alpha = 0{,}1$.

Klausuraufschrieb

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*

$P(A) = B_{10;0,6}(X = 6) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}251$

$P(B) = B_{10;0,6}(X \geq 6) = 1 - B_{10;0,6}(X \leq 5) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}633$

$P(C) = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0018$

b) *Anzahl weiblicher Personen:*

$B_{n;0,55}(X \geq 1) > 0{,}99$

$1 - B_{n;0,55}(X = 0) > 0{,}99 \qquad | \qquad +B_{n;0,55}(X = 0);\ -0{,}99$

$0{,}01 > B_{n;0,55}(X = 0)$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}55^0 \cdot 0{,}45^n < 0{,}01$

$1 \cdot 1 \cdot 0{,}45^n < 0{,}01 \qquad | \qquad ln$

$n \cdot ln(0{,}45) < ln(0{,}01) \qquad | \qquad : ln(0{,}45)$

$n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}45)} \overset{\text{WTR}}{\approx} 5{,}8$

Die Gruppe muss aus mindestens 6 weiblichen Personen bestehen.

c) *Intervallgrenzen für übergewichtige Dorfeinwohner:*

$n = 500;\ \ p = 0{,}57;\ \ \mu = n \cdot p = 285;\ \ \ \sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{285 \cdot 0{,}43} \overset{\text{WTR}}{\approx} 11{,}07$

$[\mu - 1{,}96\,\sigma,\ \mu + 1{,}96\,\sigma] = [285 - 11{,}07; 285 + 11{,}07] = [263{,}3; 306{,}7]$

Die Anzahl übergewichtiger Dorfeinwohner ist $[263; 307]$.

Signifikanztest:

H_0: $p_0 \geq 0{,}57$; $p_1 < 0{,}57$ => linksseitiger Test $\alpha = 0{,}1$; $n = 40$

$B_{40;0,57}(X \leq k) \leq 0{,}1$

$B_{40;0,57}(X \leq 18) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0855;\quad B_{40;0,57}(X \leq 19) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}146$

$\overline{A} = [0; 18];\ \ A = [19; 40]$

Entscheidungsregel:
Haben höchstens 18 *Personen im Verein einen BMI von* > 25 *, so wird die Nullhypothese verworfen, ansonsten wird sie beibehalten.*

Aufgabe M02C1

Ein Glücksrad besteht aus drei farbigen Sektoren mit den Mittelpunktswinkeln $180\,°$ (rot), $90\,°$ (gelb) und $90\,°$ (blau).

a) Das Glücksrad wird zehn Mal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   A: „Die Farbe Blau tritt genau vier Mal auf."
   B: „Die Farbe Blau tritt mindestens vier Mal auf."

b) Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über $99\,\%$ mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen?

Eine Klasse setzt dieses Glücksrad beim Schulfest ein, wobei folgende Spielregeln gelten:
Für einen Einsatz von einem Euro darf ein Spieler das Glücksrad drei Mal drehen. Wenn drei Mal dieselbe Farbe erscheint, erhält er zwei Euro zurück; wenn drei verschiedene Farben erscheinen, bekommt er nichts ausbezahlt; in allen anderen Fällen erhält er seinen Einsatz zurück.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht ein Spieler Verlust, wenn er dieses Spiel einmal spielt?

d) Die Klasse will im nächsten Jahr zwar die Spielregeln beibehalten, aber durch Veränderung der Sektorengrößen ihre Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen. Dabei soll der rote Sektor weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Drehung „gelb" erscheint. Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, am größten?

Lösung M02C1

Lösungslogik

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*
Alle zwei Ereignisse sind Binomialverteilungen. Aufstellung der jeweiligen Bernoulli-Formel und Berechnung mittels WTR.

b) *Anzahl durchzuführender Spiele:*
Gesucht wird der Stichprobenumfang n Glücksraddrehungen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal die Farbe Blau zu erhalten größer ist als $0{,}99$.
Die zugehörige Bernoulliformel lautet : $B_{n;0,25}(X \geq 1) > 0{,}99$.

c) *Wahrscheinlichkeit für Verlust bei einmaligem Spiel:*
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für drei verschiedene Farben.

d) *Wahrscheinlichkeit p für gelb damit größter Verlust entsteht:*
Wir ordnen die Wahrscheinlichkeiten neu gemäß Aufgabenstellung und berechnen erneut die Wahrscheinlichkeit für drei verschiedene Farben.

Klausuraufschrieb

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*

$P(A) = B_{10;0,25}(X = 4) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}146$

$P(B) = B_{10;0,25}(X \geq 4) = 1 - B_{10;0,25}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2241$

b) *Anzahl durchzuführender Spiele:*

$B_{n;0,25}(X \geq 1) > 0{,}99$

$1 - B_{n;0,25}(X = 0) > 0{,}99 \qquad | \quad +B_{n;0,25}(X = 0); -0{,}99$

$0{,}01 > B_{n;0,25}(X = 0)$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^n < 0{,}01$

$1 \cdot 1 \cdot 0{,}75^n < 0{,}01 \qquad | \quad ln$

$n \cdot ln(0{,}75) < ln(0{,}01) \qquad | \quad : ln(0{,}45)$

$n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}75)} \overset{\text{WTR}}{\approx} 16$

Man muss 16 Mal spielen.

c) *Wahrscheinlichkeit für Verlust bei einmaligem Spiel:*

C: „Es treten drei verschiedene Farben auf."

Die Anzahl übergewichtiger Dorfeinwohner ist $[263; 307]$.

$P(C) = 3! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} \approx 0{,}188$

Die Wahrscheinlichkeit für Verlust bei einmaligem Spiel beträgt $\frac{3}{16}$.

d) $P(gelb) = p; \quad P(rot) = 2P; \quad p(blau) = 1 - p - 2p = 1 - 3p$

$P(C) = 3! \cdot p \cdot 2p \cdot (1 - 3p) = 12p^2(1 - 3p) = 12p^2 - 36p^3$

$P'(C) = 24p - 108p^2$

$24p - 108p^2 = 0$

$12p(2 - 9p) = 0$

$p_1 = 0; \quad p_s = \frac{2}{9}$

$P''(C) = 24 - 216p$

$P''(0) > 0 \quad ==>$ Tiefpunkt, Minimum

$P''\left(\frac{2}{9}\right) < 0 \quad ==>$ Hochpunkt, Maximum

Für $P(gelb) = \frac{2}{9}$ ist die Wahrscheinlichkeit für Verlust am größten.

Aufgabe M03C1

Bei einem Schulfest gibt es verschiedene Attraktionen.

a) Auf einem Tisch liegen verdeckt fünf Spielkarten, unter denen sich zwei Joker befinden. Hilde und Franz decken abwechselnd je eine Karte auf. Es gewinnt, wer zuerst einen Joker zieht. Hilde beginnt das Spiel.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Franz gewinnt.
B: Hilde gewinnt.

b) Bei einem Glücksrad der Klasse 5a gewinnt man ein Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}25$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 50 Spielen mindestens zehn Mal gewinnt?

Beim Glücksrad der Klasse 5b beträgt die Wahrscheinlichkeit, bei 50 Spielen mindestens zehn Mal zu gewinnen, $99\,\%$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in einem Spiel auf zwei Dezimalen genau.

c) Bei einem Spielautomaten erscheint auf Knopfdruck ein Bildsymbol: entweder eine Sonne oder ein Mond. Für einen Einsatz von einem Euro darf man zwei Mal nacheinander drücken. Erscheint zwei Mal die Sonne, so erhält man zwei Euro ausbezahlt; erscheint zwei Mal der Mond, so erhält man einen Euro ausbezahlt, in den anderen Fällen erhält man nichts ausbezahlt.
Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für Sonne sein, damit das Spiel fair ist?

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 03

Lösung M03C1

Lösungslogik

a) *Wahrscheinlichkeiten für Gewinn von Hilde bzw. Franz:*
Unter Verzicht auf ein Baumdiagramm stellen wir die einzelnen Ergebnisse für Hilde zusammen und berechnen deren Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von Franz ergibt sich dann über das Gegenereignis.

b) *Glücksräder Klasse 5a und Klasse 5b:*
Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung, Aufstellung der Bernoulliformel und Berechnung. Im Falle von Klasse 5b über eine Interpolation der Gewinnwahrscheinlichkeit.

c) *Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit für faires Spiel:*
Wir berechnen den Erwartungswert mit einer Wahrscheinlichkeit p_{Sonne} und setzen dann $E(X)$ auf Null.

Klausuraufschrieb

a) *Wahrscheinlichkeiten für Gewinn von Hilde bzw. Franz:*
Es sei J_H gleich „Hilde zieht einen Joker, $\overline{J_H}$ gleich „Hilde zieht keinen Joker.
Es sei J_F gleich „Franz zieht einen Joker, $\overline{J_F}$ gleich „Franz zieht keinen Joker.
Ergebnisraum für Hilde, die beginnt:
$\Omega_{\mathrm{H}} = \{J_H; \overline{J_H J_F} J_H\}$
$P(B) = P(J_H) + P\left(\overline{J_H J_F} J_H\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{12}{60} = \frac{24+12}{60} = \frac{36}{60} = 0{,}6$
Ergebnisraum für Franz, der als Zweiter zieht:
$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}6) = 0{,}4$

b) *Glücksräder Klasse 5a und Klasse 5b:*

Klasse 5a: $B_{50;0,25}(X \geq 10) = 1 - B_{50;0,25}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}8363$
Die Wahrscheinlichkeit für Klasse 5a beträgt etwa $0{,}84$.
Klasse 5b: $B_{50;p}(X \geq 10) = 1 - B_{50;p}(X \leq 9) = 0{,}99$

$$1 - \sum_{i=1}^{9} \binom{50}{i} p^i \cdot (1-p)^{50-i} = 0{,}99$$

$$\sum_{i=1}^{9} \binom{50}{i} p^i \cdot (1-p)^{50-i} = 0{,}01$$

Diese Formel ist mit dem WTR nicht mehr abbildbar und wir fangen an zu interpolieren, wir beginnen mit $p = 0{,}3$:

$B_{50;0,3}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}04$

$B_{50;0,4}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0007$

$B_{50;0,35}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0067$

$B_{50;0,34}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}009$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in einem Spiel muss etwa $34\,\%$ *betragen.*

c) *Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit für faires Spiel:*
$P(Sonne) = p;\quad P(Mond) = 1 - p$
Nachweis faires Spiel:
Wahrscheinlichkeiten der Gewinnsituationen:
Sonne-Sonne: $p \cdot p = p^2$
Mond-Mond: $(1-p)^2 = 1 - 2p + p^2$
Verlust: $1 - P(Sonne, Sonne) - P(Mond, Mond)$
$1 - p^2 - (1 - 2p + p^2) = -2p^2 + 2p$

X_i	$1{,}00$ €	0 €	$-1{,}00$ €	
p_i	p^2	$(1-p)^2$	$2p - 2p^2$	
$X_i \cdot p_i$	p^2	0	$2p^2 - 2p$	
$\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i$	$p^2 + 2p^2 - 2p$			

Das Spiel soll fair, sein, also $E(X) = 0$*.*
$3p^2 - 2p = 0$
$p(3p - 2) = 0$
$p_1 = 0;\quad p_2 = \frac{2}{3}$
$p_1 = 0$ macht keinen Sinn.
Die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen von Sonne muss $\frac{2}{3}$ *betragen, damit das Spiel fair ist.*

Aufgabe M04C1

Ein Hotel hat 150 Zimmer. Für sein beliebtes Wochenendangebot liegen immer deutlich mehr als 150 Anfragen für Reservierungen vor. Da die Hotelleitung im vergangenen Jahr die Erfahrung gemacht hat, dass im Mittel nur $90\,\%$ der Reservierungen in Anspruch genommen werden, entschließt sie sich nun, immer 160 Reservierungen anzunehmen.
Die Anzahl der Reservierungen, die tatsächlich in Anspruch genommen werden, wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben. Diese wird als binomialverteilt angenommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
   $E1$: Genau 150 Reservierungen werden in Anspruch genommen.
   $E2$: Es müssen Gäste, die reserviert haben, abgewiesen werden.
   $E3$: Alle Gäste, die ihre Reservierung in Anspruch nehmen wollen, bekommen ihr Zimmer.

b) Falls Gäste, die reserviert haben, wegen Überbuchung kein Zimmer bekommen, müssen sie auf Kosten des Hotels in einem teureren Hotel in der Nähe untergebracht werden. Die Hotelleitung will daher erreichen, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall unter $1\,\%$ liegt.
   Wie viele Reservierungen darf sie dann höchstens annehmen?

Die Hotelleitung überlegt, ob sie das Hotel mit einer Sauna ausstatten soll. Das Vorhaben soll aber nur dann umgesetzt werden, wenn mindestens $20\,\%$ der Gäste dieses kostenpflichtige Angebot auch nutzen würden.
Die Nullhypothese H_0: *„Höchstens $20\,\%$ der Gäste würden die Sauna nutzen.“*
soll auf der Basis einer Umfrage bei 300 Gästen auf einem Siginifikanzniveau von $5\,\%$ getestet werden.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

d) Vor der Konzeption des Tests stellte die Hotelleitung folgende Überlegungen an:
   I: Wenn die Sauna nicht gebaut wird, obwohl sie mindestens $20\,\%$ der Gäste nutzen würden, entgehen dem Hotel zusätzliche Einnahmen.
   II: Wenn die Sauna gebaut wird, obwohl sie höchstens $20\,\%$ der Gäste nutzen, entstehen dem Hotel finanzielle Verluste.
   Für einen dieser beiden Fälle kann die Wahrscheinlichkeit des Eintretens mit obigem Test auf $5\,\%$ begrenzt werden.
   Entscheiden Sie, welcher der beiden Fälle dies ist.
   Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung M04C1

Lösungslogik

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*
Alle drei Ereignisse sind Binomialverteilungen. Aufstellung der jeweiligen Bernoulli-Formel und Berechnung mittels WTR.
Das Ereignis $E3$ ist das Gegenereignis von $E2$.

b) *Wahrscheinlichkeit für Überbuchung unter $1\,\%$:*
Gesucht wird die größte Reservierungszahl $n > 150$, damit die Wahrscheinlichkeit, bei Inanspruchnahme überbuchter Reservierungen kleiner als $1\,\%$ ist.
Die zugehörige Bernoulliformel lautet : $B_{n;0,9}(X \geq 151) < 0{,}01$.

c) *Entscheidungsregel eines Signifikanztests:*
Gesucht ist die Anzahl k von befragten Personen, die das Saunaangebot nutzen würden.

d) *Fallentscheidung und Begründung:*
Siehe Klausuraufschrieb

Klausuraufschrieb

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*

$P(E1) = B_{160;0,9}(X = 150) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0311$

$P(E2) = B_{160;0,9}(X \geq 151) = 1 - B_{160;0,9}(X \leq 150) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0359$

$P(E3) = 1 - P(E2) = 0{,}9641$

b) *Wahrscheinlichkeit für Überbuchung unter $1\,\%$:*

$B_{n;09}(X \geq 151) < 0{,}01$

$1 - B_{n;0,9}(X \leq 150) < 0{,}01 \quad | \quad +B_{n;0,9}(X \leq 150);\ -0{,}01$

$B_{n;0,9}(X \leq 150) > 0{,}99$

Da der WTR keine Möglichkeit einer Direktlösung bietet, wird ein iteratives Verfahren angewendet. Wir starten mit $n = 156$

$B_{156;0,9}(X \leq 150) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9987$

$B_{157;0,9}(X \leq 150) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9965$

$B_{158;0,9}(X \leq 150) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9915$

$B_{159;0,9}(X \leq 150) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9816$

Es dürfen maximal 158 *Reservierungen angenommen werden.*

c) *Entscheidungsregel eines Signifikanztests:*

$H_0\colon\ p_0 \leq 0{,}2 \qquad H_1\colon\ p_1 > 0{,}2 \qquad \alpha = 0{,}05$

$B_{300;0,2}(X \geq k) < 0{,}05$

$1 - B_{300;0,2}(X \leq k-1) < 0{,}05 \quad | \quad +B_{300;0,2}(X \leq k-1);\ -0{,}05$

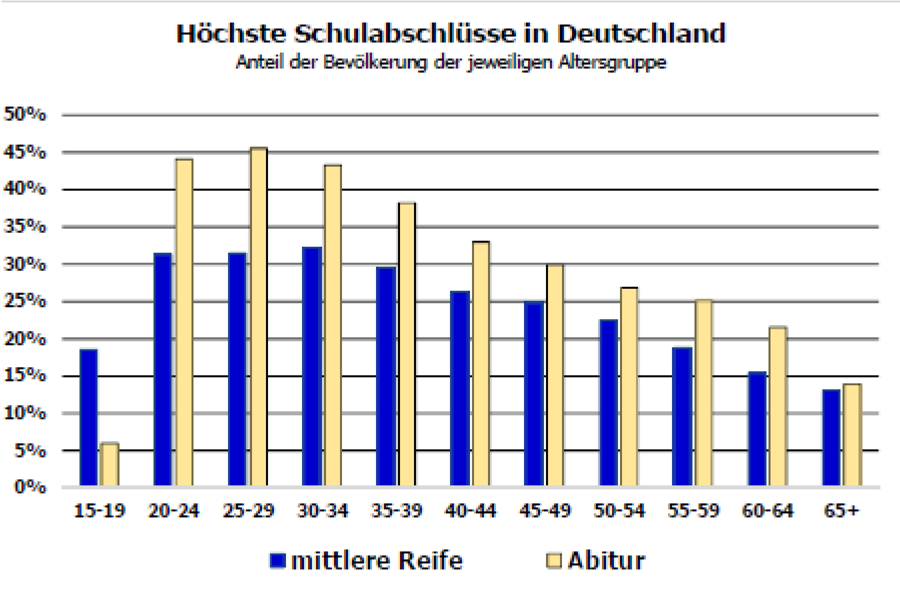
$B_{300;0,2}(X \leq k-1) > 0{,}95$

Da der WTR keine Möglichkeit einer Direktlösung bietet, wird ein iteratives Verfahren angewendet.
Wir ermitteln zunächst den Startwert für k über die σ-Regeln.
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{300 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} \approx 6{,}9 \quad \mu = n \cdot p = 60$
Ein rechtsseitiges Signifikanzniveau von $0{,}05$ liegt etwa im $1{,}5\sigma$-Bereich.
$k - 1 = \mu + 1{,}5\sigma = 60 + 1{,}5 \cdot 6{,}9 = 70{,}35$
Wir starten mit $k - 1 = 70$.
$B_{300;0,2}(X \leq 70) > 0{,}933$
$B_{300;0,2}(X \leq 71) > 0{,}949$
$B_{300;0,2}(X \leq 72) > 0{,}962$
$k - 1 = 72$
$k = 73$
$A = [0; 72]; \quad \overline{A} = [73; 300]$
Entscheidungsregel:
Wenn mindestens 73 der Befragten das Saunaangebot nutzen wollen, wird die H_0-Hypothese abgelehnt (die Sauna wird gebaut), ansonsten bleibt sie erhalten (die Sauna wird nicht gebaut).

d) *Fallentscheidung und Begründung:*
Für die Überlegung II kann die Wahrscheinlichkeit des Eintretens auf $5\,\%$ begrenzt werden.
Im Test wurde die Nullhypothese, dass höchstens $20\,\%$ der Befragten die Sauna benutzen, mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens $5\,\%$ abgelehnt.

Aufgabe M05C1

Das folgende Diagramm zeigt Daten des statistischen Bundesamts zum jeweils höchsten erreichten Schulabschluss in verschiedenen Altersgruppen (Stand 2012):



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte $20-24$-jährige Person kein Abitur hat.
Eine andere Statistik gibt an, dass 2012 die Anzahl der Personen mit mittlerer Reife im Alter von 45 bis 49 Jahren größer war als die entsprechende Anzahl bei den 35-39-jährigen Personen.
Untersuchen Sie, ob diese Aussage mit den obigen Daten vereinbar ist.

b) Zwanzig Personen im Alter von 55 bis 59 Jahren werden zufällig ausgewählt.
Begründen Sie, dass die Anzahl der Personen mit Abitur in dieser Gruppe mit einer binomialverteilten Zufallsvariablen beschrieben werden kann.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: In dieser Gruppe haben genau sechs Personen Abitur.
B: In dieser Gruppe haben höchstens vier Personen Abitur.

c) Zwölf Personen nehmen an einem Abitur-Fernkurs teil. Zehn von ihnen haben bereits die mittlere Reife. Bei jedem von ihnen liegt die Erfolgschance bei $80\,\%$. Bei den beiden anderen beträgt die Erfolgschance jeweils nur $60\,\%$.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
C: Alle zehn Personen mit mittlerer Reife sind erfolgreich.
D: Mindestens elf Personen schließen den Fernkurs erfolgreich ab.

Lösung M05C1

Klausuraufschrieb

a) *Wahrscheinlichkeit 20-24-jährige Person kein Abitur:*

$P_{20-24}(Abitur) = 0{,}44$ | Abgelesen aus Graphik

$P_{20-24}(\overline{Abitur}) = 0{,}56$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 20-24-jährige Person kein Abitur hat, beträgt $56\,\%$

Anzahl der Personen mit mittlerer Reife im Alter von 45 *bis* 49 *Jahren größer als die entsprechende Anzahl bei den* 35-39-*jährigen Personen:*

Laut Diagramm haben die 35-39-jährigen Personen mit mittlere Reife einen höherer **Anteil** als die 45-49-jährigen. Die andere Statistik spricht von **Personen**. Da über die Personenanzahl der einzelnen Gruppen keine Angabe vorliegt, ist die Aussage mit der vorgelegten Graphik durchaus vereinbar (z.B. sind $25\,\%$ von 2000 Personen 500 Personen, $30\,\%$ von 1000 Personen aber nur 300 Personen).

b) *Begründung einer Binomialverteilung:*

Die zufällige Auswahl von Personen aus der Gruppe der 55-59-jährigen ist ein Bernoulli-Experiment mit den beiden Ergebnissen **Abitur** und **kein Abitur**. Die 20-fache Wiederholung dieses Experiments ist eine Bernoulli-Kette.

Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:

$P(A) = B_{20;0,25}(X = 6) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}1686$

$P(B) = B_{20;0,25}(X \leq 4) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}4148$

c) *Mehrstufiger Zufallsversuch:*

10 aus 12 Personen mit mittlerer Reife: $p_1 = \frac{10}{12}$ mit $p_{1E} = 0{,}8$

2 aus 12 Personen ohne mittlerer Reife: $p_2 = \frac{2}{12}$ mit $p_{2E} = 0{,}6$

$\mathrm{P}(C) = B_{10;0,8}(X = 10) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}1074$

Beim Ereignis bestehen entweder alle 10 Personen mit mittlerer Reife **und** beide Personen ohne mittlerer Reife **oder** alle 10 Personen mit mittlerer Reife **und** eine Person ohne mittlere Reife **oder** 9 Personen mit mittlerer Reife **und** beide Personen ohne mittlere Reife.

$$\mathrm{P}(D) = B_{10;0,8}(X = 10) \cdot B_{2;0,6}(X = 2) + B_{10;0,8}(X = 10) \cdot B_{2;0,6}(X = 1) + B_{10;0,8}(X = 9) \cdot B_{2;0,6}(X = 2)$$

$$\mathrm{P}(D) = 0{,}1074 \cdot 0{,}36 + 0{,}1074 \cdot 0{,}48 + 0{,}2684 \cdot 0{,}36 = 0{,}1868$$

Hinweis: Dies ist ein sehr schönes Beispiel für die allgemeine Regel in der Wahrscheinlichkeitsrechnung:
Muss man Ereignisse mit **und** verbinden, werden die Wahrscheinlichkeiten **multipliziert**.
Muss man Ereignisse mit **oder** verbinden, werden die Wahrscheinlichkeiten **addiert**.

Aufgabe M06C1

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile der in Deutschland fahrenden Autos.

Farbe	silber oder grau	schwarz	weiß
Anteil	$29{,}9\,\%$	$28{,}8\,\%$	$15{,}1\,\%$

Diese Anteile werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der jeweiligen Autofarben verwendet.
Zwei Kinder beobachten vorbeifahrende Autos und achten auf deren Farbe.

a) Zunächst beobachten die Kinder 80 Autos.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Genau 22 Autos sind silber oder grau.
B: Mindestens 33 Autos sind schwarz.
C: Unter den ersten zehn Autos sind mindestens drei, die keine in der Tabelle angegebenen Farben haben und von den anderen 70 Autos sind höchstens 20 schwarz.

b) Wie hoch müsste der Anteil der schwarzen Autos mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ unter 100 beobachteten Autos mindestens 28 schwarz sind.

c) Das eine Kind bietet dem anderen folgendes Spiel an:
„Wenn von den nächsten vier Autos mindestens drei hintereinander nicht schwarz sind, bekommst du von mir ein Gummibärchen, ansonsten bekomme ich eines von dir.“
Untersuchen Sie, ob dieses Spiel fair ist.

d) Es wird vermutet, dass der Anteil p der weißen Autos zugenommen hat. Um dies zu überprüfen, wird die Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}151$ auf dem Signifikanzniveau $10\,\%$ getestet. Dazu werden die Farben von 500 Autos erfasst.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung M06C1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Bernoulliexperiment, bei dem p für die Anzahl schwarzer Autos gesucht ist.
c) Überprüfung des Erwartungswertes auf Wert 0.
d) Hypothesentest, Formulierung der Entscheidungsregel siehe Klausuraufschrieb (keine Berechnung gefordert).

Klausuraufschrieb

a) A: Genau 22 Autos sind silber oder grau.

$B_{80;0,299}(X = 22) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}089$

B: Mindestens 33 Autos sind schwarz.

$B_{80;0,288}(X \geq 33) = 1 - B_{80;0,288}(X \leq 32) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0115$

C: Unter den ersten zehn Autos sind mindestens drei, die keine in der Tabelle angegebenen Farben haben und von den anderen 70 Autos sind höchstens 20 schwarz.

Wahrscheinlichkeit für keine in der Tabelle angegebenen Farben:

$100\ \% - 29{,}9\ \% - 28{,}8\ \% - 15{,}1\ \% = 26{,}2\ \%$

$B_{10;0,262}(X \geq 3) \cdot B_{70;0,288}(X \leq 20) = (1 - B_{100,262}(X \leq 2) \cdot B_{70;0,288}(X \leq 20) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}277$

b) $B_{100;p}(X \geq 28) > 0{,}95$

$1 - B_{100;p}(X \leq 27) > 0{,}95$

$B_{100;p}(X \leq 27) < 0{,}05$

Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.

Die Wahrscheinlichkeit $< 0{,}05$ liegt etwa links vor dem $1{,}5\sigma$-Bereich.

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot p; \quad \sigma = \sqrt{100 \cdot p(1-p)}$

$100 \cdot p - 1{,}5 \cdot \sqrt{100 \cdot p(1-p)} = 27$

$1{,}5 \cdot \sqrt{100 \cdot p(1-p)} = 27 - 100 \cdot p$

$2{,}25 \cdot (100p - 100p^2) = 729 - 5400p + 10000p^2$

$10000p^2 + 225p^2 - 225p - 5400p + 729 = 0$

$10225p^2 - 5625p + 729 = 0$

$p^2 - \frac{5625}{10225}p + \frac{729}{10225} = 0$

$p_{1,2} = 0{,}275 \pm \sqrt{0{,}076 - 0{,}071} = 0{,}275 \pm 0{,}071$

$p_1 = 0{,}346; \quad p_2 = 0{,}204$

Wir berechnen

$B_{100;0,204}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}957$

$B_{100;0,346}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}065$

Aus dem Ergebnis lesen wir ab, dass $p > 0{,}346$ sein muss und iterieren weiter:

$B_{100;0,35}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}055$

$B_{100;0,36}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}036$

p liegt also etwas über $0{,}35$.

$B_{100;0,351}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0535$

$B_{100;0,352}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0513$

$B_{100;0,353}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}049 \approx 0{,}05$

Der Anteil schwarzer Autos muss mindestens $35{,}3\ \%$ *betragen.*

c) *Erwartungswert:*

$P(Gewinn)$: Mindestens drei von vier Autos hintereinander nicht schwarz:

$P(\overline{ssss}) + P(s\overline{sss}) + P(\overline{sss}s)$ mit $p(s) = 0{,}288$ und $p(\overline{s}) = 0{,}712$.

$P(Gewinn) = 2 \cdot 0{,}288 \cdot 0{,}712^3 + 0{,}712^4 = 0{,}4649$

Somit ist $P(Gewinn) = 0{,}4649$ und $P(Verlust) = 1 - 0{,}4649 = 0{,}5351$.

$P(Gewinn) - P(Verlust) = 0{,}4649 - 0{,}5351 = -0{,}0702$

$\mathrm{E(x)} \neq 0$ das Spiel ist nicht fair.

d) Hypothesentest mit H_0: $p_0 \leq 0{,}151$ und H_1: $p_1 > p_0$

Es ist ein rechtsseitiger Test auszuführen auf dem Signifikanzniveau $10\ \%$.

Die H_0-Hypothese wird abgelehnt, wenn zu viele weiße Autos festgestellt werden, dabei ist der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{a; a+1; a+2; \dots 500\}$ wobei a die kleinste natürliche Zahl ist, für die gilt:

$B_{500;0,151}(X \geq a) < 0{,}1$ bzw. $1 - B_{500;0,151}(X \leq a-1) < 0{,}1$

$B_{500;0,151}(X \leq a-1) > 0{,}9$

Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.

Die Wahrscheinlichkeit $> 0{,}9$ liegt etwa rechts nach dem $1{,}2\sigma$-Bereich.

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}151 = 75{,}5; \quad \sigma = \sqrt{75{,}5 \cdot (1 - 0{,}151)} = 8$

$a - 1 = \mu + 1{,}2 * \sigma = 75{,}5 + 9{,}6 = 85{,}1$

Wir starten mit $a - 1 = 85$

$B_{500;0,151}(X \leq 85) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}893$

$B_{500;0,151}(X \leq 86) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9134$

$a - 1 = 86$

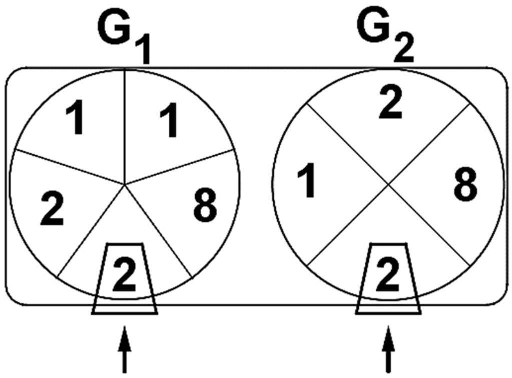
$a = 87$

$\overline{A} = \{87; 88; 89; \dots 500\}$

Entscheidungsregel: Sind mindestens 87 *Autos weiß, so wird die* H_0*-Hypothese verworfen, ansonsten wird sie beibehalten.*

Aufgabe M07C1

Bei dem dargestellten Glücksspielautomaten sind zwei Glücksräder G_1 und G_2 mit fünf bzw. vier gleich großen Kreissektoren angebracht. Bei jedem Spiel werden sie in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im Rahmen angezeigt wird. Der Spieleinsatz beträgt $2\,€$. Sind die beiden angezeigten Zahlen gleich, so wird deren Summe in Euro ausbezahlt; andernfalls wird nichts ausgezahlt.
Der Hauptgewinn besteht also daraus, dass $16\,€$ ausbezahlt werden.



a) Ein Spieler spielt zehn Mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   A: Das Glücksrad G_1 zeigt genau fünf Mal die Zahl 1.
   B: Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10.
   C: Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn.

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $95\,\%$ soll in mindestens einem Spiel der Hauptgewinn erzielt werden.
   Berechnen Sie, wie oft man dafür mindestens spielen muss.

c) Berechnen Sie, wie viel der Spielebetreiber auf lange Sicht durchschnittlich pro Spiel verdient.

d) Der Betreiber möchte erreichen, dass bei zehn Spielen die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Hauptgewinn maximal $25\,\%$ beträgt.
   Dazu möchte er bei dem Glücksrad G_2 den Mittelpunktswinkel des Kreissektors verändern, der mit der Zahl 8 beschriftet ist.
   Berechnen Sie, wie weit der Mittelpunktswinkel dieses Kreissektors maximal gewählt werden darf.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 07

Lösung M07C1

Lösungslogik

a) Ereignis A ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{10;0,4}(X=5)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gefallenen 1-en an, Berechnung per WTR.
Der Ereignisraum für Ereignis B ist $\Omega=\{(2;8),(8;2)\}$. Berechnung der Wahrscheinlichkeit gemäß der erste und zweiten Pfadregel.
Ereignis C ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{10;\frac{1}{20}}(X\geq 1)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gedrehten Doppel-Acht an. Berechnung per WTR über das Gegenereignis.

b) Bernoulli-Experiment mit $B_{n;\frac{1}{20}}(X\geq 1)>0{,}95$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gedrehten Doppel-Acht an. Gesucht wird die Mindestanzahl der Drehungen des Glücksrades.

c) Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$.

d) Bernoulli-Experiment mit $B_{10;\frac{1}{5}\cdot p_2}(X\geq 1)\leq 0{,}25$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gedrehten Doppel-Acht an. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für eine 8 bei Glücksrad G_2.

Klausuraufschrieb

a) A: Das Glücksrad G_1 zeigt genau fünf Mal die Zahl 1.

$$P(G_1=1)=\frac{2}{5}\Rightarrow\ B_{10;0,4}(X=5)\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}201$$

B: Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10.

$$\Omega=\{(2;8),(8;2)\}$$
$$P(\Omega)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}=20\,\%$$

C: Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn.

$$B_{10;\frac{1}{20}}(X\geq 1)=1-B_{10;\frac{1}{20}}(X=0)\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}401$$

b)
$$B_{n;\frac{1}{20}}(X\geq 1)>0{,}95$$
$$1-B_{n;\frac{1}{20}}(X=0)>0{,}95$$
$$B_{n;\frac{1}{20}}(X=0)<0{,}05$$
$$\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^0\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^n<0{,}05$$
$$\left(\frac{19}{20}\right)^n<0{,}05 \qquad |\quad ln$$
$$n\cdot ln\left(\frac{19}{20}\right)<ln(0{,}05) \qquad |\quad :ln\left(\frac{19}{20}\right)$$
$$n>\frac{ln(0{,}05)}{ln\left(\frac{19}{20}\right)}=58{,}4$$

Man muss mindestens 59 Mal spielen.

c) *Berechnung des Erwartungswertes:*
Wahrscheinlichkeiten der Gewinnsituationen:

„1"-„1" $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

„2"-„2" $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10}$

„8"-„8" $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

X_i	$0{,}00\,€$	$2{,}00\,€$	$14{,}00\,€$	$-2{,}00$
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{13}{20}$
$X_i \cdot p_i$	$0{,}00$	$0{,}40$	$0{,}70$	$-1{,}30$
$\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i$	$0{,}00 + 0{,}40 + 0{,}70 - 1{,}30 = -0{,}20$			

Wegen $E(X) = \sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i = -0{,}20$ *verdient der Spielebetreiber auf lange Sicht gesehen* $0{,}20\,€$ */ Spiel.*

d) $B_{10;\frac{1}{5}\cdot p_2}(X \geq 1) \leq 0{,}25$

$1 - B_{10;\frac{1}{5}\cdot p_2}(X = 0) \leq 0{,}25$

$B_{10;\frac{1}{5}\cdot p_2}(X = 0) \geq 0{,}75$

$\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{p}{5}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{p}{5}\right)^{10} \geq 0{,}75$

$\left(1 - \frac{p}{5}\right)^{10} \geq 0{,}75 \qquad | \quad \sqrt[10]{}$

$1 - \frac{p}{5} \geq \sqrt[10]{0{,}75}$

$\frac{p}{5} \leq 1 - \sqrt[10]{0{,}75}$

$\frac{p}{5} \leq 0{,}0284$

$p \leq 0{,}0284 \cdot 5 = 0{,}1418$

Maximaler Mittelpunktwinkel:

$\varphi_{max} = 360\,° \cdot p = 360\,° \cdot 0{,}1418 \approx 51\,°$

Der Mittelpunktswinkel für die 8 *bei* G_2 *darf höchstens* $51\,°$ *betragen.*

Aufgabe M08C1.1

Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind $4\,\%$ der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

a) 800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft."
B: „Mindestens $5\,\%$ der Teile sind fehlerhaft."

b) Ermitteln Sie, wie viele Kunststoffteile mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit davon mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens 100 Teile keinen Fehler haben.

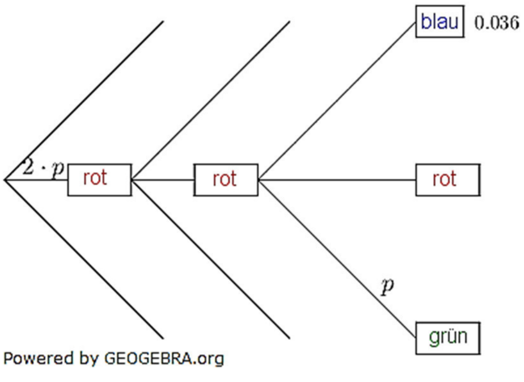
c) Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens $4\,\%$" auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Teilen auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ getestet werden.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Aufgabe M08C1.2

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei Sektoren in den Farben rot, grün und blau hat. Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, beträgt ebenfalls $\frac{1}{6}$.

a) Bei einem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen.
Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

b) Die ursprünglichen Größen der Sektoren werden geändert. Dabei soll der Mittelpunkts-Winkel des blauen Sektors größer als $180\,°$ werden. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die drei Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben.
Bestimmen Sie die Weite des zum blauen Sektor gehörenden Mittelpunkt-Winkels.



Lösung M08C1.1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Bernoulliexperiment, bei dem der Stichprobenumfang gesucht wird.
Die zugehörige Bernoulliformel lautet: $B_{n;0{,}96}(X \geq 100) > 0{,}95$.
c) Hypothesentest, Formulierung der Entscheidungsregel siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft."
$B_{800;0{,}04}(X = 30) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}06927$
B: „Mindestens $5\,\%$ der Teile sind fehlerhaft."
$5\,\%$ von 800 sind 40 fehlerhafte Teile.
$B_{800;0{,}04}(X \geq 40) = 1 - B_{800;0{,}04}(X \leq 39) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}091$

b) $B_{n;0{,}96}(X \geq 100) > 0{,}95$
$1 - B_{n;0{,}96}(X \leq 99) > 0{,}95$
$B_{n;0{,}96}(X \leq 99) < 0{,}05$
Diese Formel kann mit dem WTR nicht direkt gelöst werden, sodass ein iteratives Verfahren angewandt werden muss.
Eine Wahrscheinlichkeit $< 0{,}05$ liegt links der etwa $1{,}5\sigma$-Intervallgrenze.
$\mu = n \cdot p = 0{,}96n; \quad \sigma = \sqrt{0{,}96n \cdot 0{,}04}$
Mit $\mu - \sigma = 99$ erhalten wir:
$0{,}96n - 1{,}6 \cdot \sqrt{0{,}0384n} = 99$
$1{,}5 \cdot \sqrt{0{,}0384n} = 0{,}96n - 99$
$0{,}0864n = 0{,}9216n^2 - 189{,}9936n + 9801$
$0{,}9216n^2 - 189{,}9936n + 9801 = 0$
$n^2 - 206{,}15625n + 10634{,}7656 = 0$
$n_{1,2} = 103{,}07 \pm \sqrt{10623{,}4249 - 10634{,}7656}$
Wegen der Näherung können wir annehmen, dass die Wurzel Null ist.
Wir starten somit mit $n = 103$

$B_{103;0{,}96}(X \leq 99) = 0{,}594$ | $B_{104;0{,}96}(X \leq 99) = 0{,}403$
$B_{105;0{,}96}(X \leq 99) = 0{,}244$ | $B_{106;0{,}96}(X \leq 99) = 0{,}133$
$B_{107;0{,}96}(X \leq 99) = 0{,}066$ | $B_{108;0{,}96}(X \leq 99) = 0{,}0295$

Es müssen mindestens 108 Teile ausgewählt werden.

c) *Hypothesentest:*
H_o: $p_o \geq 0{,}04; \quad H_1$: $p_1 < 0{,}04$
$n = 500; \quad \alpha = 0{,}05$
Wegen $p_1 < p_0$ ist ein linksseitiger Test erforderlich mit
$B_{500;0{,}04}(X \leq k) \leq 0{,}05$
Ablehnungsbereich $\overline{A} = [0; 1; 2; \ldots; k]$
Annahmebereich $A = [k+1; k+2; k+3; \ldots; 500]$
Die Formel kann mit dem WTR nicht mehr direkt gelöst werden, sodass ein iteratives Verfahren angewandt werden muss.
Eine Wahrscheinlichkeit $\leq 0{,}05$ liegt links der etwa $1{,}5\sigma$-Intervallgrenze.

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}04 = 20; \quad \sigma = \sqrt{20 \cdot (1-p)} = \sqrt{20 \cdot 0{,}96} = 4{,}3817$
$\mu - 1{,}5\sigma = 20 - 1{,}5 \cdot 4 = 14$
Wir starten mit $k = 14$:
$B_{500;0,04}(X \leq 14) = 0{,}1002$ $\quad$ $B_{500;0,04}(X \leq 13) = 0{,}0623$
$B_{500;0,04}(X \leq 12) = 0{,}0362$
Sind höchstens 12 Teile fehlerhaft, so wird die Null-Hypothese abgelehnt, ansonsten wird sie beibehalten.

Lösung C1.2

Lösungslogik

a) *Aufgabe zum Erwartungswert.*
Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn bei drei gleichen Farben ist $\frac{1}{6}$, bei drei verschiedenen Farben ebenfalls $\frac{1}{6}$, somit für keinen Gewinn $\frac{4}{6}$. Gesucht ist der Auszahlungsbetrag a bei drei verschiedenen Farben für $E(X) = 0$.

b) *Mittelpunkt-Winkel für blau:*
Aus dem Baumdiagramm lesen wir ab:
$P(rot) = 2p; \quad P(grün) = p$
Da die Summe aller möglichen Ergebnisse immer sein muss, muss gelten:
$P(blau) = 1 - (P(rot) + P(grün) = 1 - (2p + p) = 1 - 3p$
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $rotrotblau$ ist mit $P(rotrotblau) = 0{,}036$ gegeben.
Über diesen Ansatz bestimmen wir $P(blau)$ und hieraus dann den Mittelpunkt-Winkel.

Klausuraufschrieb

a) *Erwartungswert:*
Tabelle der Ergebnisse

X_i	$5{,}00$ €	$a - 5$ €	$-5{,}00$
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
$X_i \cdot p_i$	$\frac{5}{6}$	$\frac{a-5}{6}$	$-\frac{20}{6}$
$\sum_{i=1}^{3} X_i \cdot p_i$	$\frac{5}{6} + \frac{a-5}{6} - \frac{20}{6}$		

Laut Aufgabenstellung soll $E(X) = 0$ sein.
$\frac{5}{6} + \frac{a}{6} - \frac{5}{6} - \frac{20}{6} = 0$
$a - 20 = 0$
$a = 20$
Der Gewinnbetrag für drei unterschiedliche Farben beträgt 20 *Euro.*

b) *Mittelpunkt-Winkel für blau:*
Aus dem Baumdiagramm lesen wir ab.
$P(rot) = 2p;\ \ P(grün) = p$
Somit gilt für $P(blau) = 1 - \big(P(rot) + P(grün)\big) = 1 - 3p$
$P(rot; rot; blau) = 2p \cdot 2p \cdot (1 - 3p) = 0{,}036$
$4p^2 - 12p^3 - 0{,}036 = 0 \qquad | \quad :4$
$p^2 - 3p^3 - 0{,}009 = 0$
$p_1 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}118; \quad p_2 \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}3$
Da $P(blau) > 0{,}5$ sein soll (Mittelpunktwinkel $> 180\,°$) kommt nur $p_1 = 0{,}118$ in Frage, also
$P(blau) = 1 - 3 \cdot 0{,}118 = 0{,}646$
$360\,° \cdot 0{,}646 = 232{,}56\,°$
Der Mittelpunkt-Winkel für blau beträgt $232{,}56\,°$*.*

Aufgabe M09C1

Ein Affe sitzt vor einer Tastatur, deren Tasten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 sowie mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F beschriftet sind (siehe Abbildung). Zunächst wird angenommen, dass der Affe zufällig auf die Tasten tippt. Die Tastatureingaben werden aufgezeichnet.

a) Es werden die ersten fünf Tastaturanschläge des Affen betrachtet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
   - A: „Der Affe tippt nur auf Tasten mit Ziffern."
   - B: „Der Affe tippt höchstens dreimal eine Ziffer."
   - C: „Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben $A\ F\ F\ E$ direkt hintereinander."

b) Nun werden Versuchsreihen mit jeweils 20 Tastaturanschlägen durchgeführt. Wie viele Buchstaben pro Versuchsreihe kann man dabei auf lange Sicht im Mittel erwarten?
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Versuchsreihe die Anzahl der getippten Buchstabentasten um höchstens $20\,\%$ von diesem erwarteten Wert abweicht.
Wie viele Zifferntasten müssten mindestens hinzugefügt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 Buchstabentasten in einer Versuchsreihe getippt werden, auf unter $1\,\%$ fällt?

c) Die Ergebnisse der Versuche lassen die Vermutung aufkommen, dass der Affe die Zifferntasten gegenüber den Buchstabentasten bevorzugt. Daher wird die Nullhypothese
„Der Affe tippt mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $40\,\%$ eine Zifferntaste"
mit einer Stichprobe von 80 Tastaturanschlägen auf einem Signifikanzniveau von $1\,\%$ überprüft.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 09

Lösung M09C1

Lösungslogik

a) Ereignis A ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{5;0,4}(X=5)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl getippter Ziffern an. Berechnung per WTR.
Ereignis B ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{5;0,4}(X \leq 3)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl getippter Ziffern an. Berechnung per WTR.
Ereignis C ist kein Bernoulli-Experiment. Der Ergebnisraum ist $\Omega = \{(egal; A; F; F; E), (A; F; F; E; eagl)\}$ Berechnung per WTR.

b) *Anzahl Buchstaben auf lange Sicht:*
$P(Buchstabe) = 0{,}6$, binomialverteilt, damit $\mu = n \cdot p$.
Wahrscheinlichkeit von $20\,\%$ *Abweichung vom Mittelwert:*
Gesucht ist $B_{20;0,6}(\mu - 0{,}2 \cdot \mu \leq X \leq \mu + 0{,}2 \cdot \mu)$
Anzahl hinzuzufügender Zifferntasten:
Gesucht wird p von $B_{20;p}(X \geq 15) < 0{,}01$.

c) *Aufgabe zum Signifikanztest*:
Siehe Klausuraufschrieb

Klausuraufschrieb

a) A: „Der Affe tippt nur auf Tasten mit Ziffern."

$P(Ziffern) = 0{,}4 \Longrightarrow \quad B_{5;0,4}(X=5) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}01024$

B: „Der Affe tippt höchstens dreimal eine Ziffer."

$B_{5;0,4}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}913$

C: „Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben $A\ F\ F\ E$ direkt hintereinander."

$P(C) = P(\{A; F; F; E; egal\}; \{egal; A; F; F; E\}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot 1 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0002$

b) *Anzahl Buchstaben auf lange Sicht:*
$P(Buchstabe) = 0{,}6$
$\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}6 = 12$
Auf lange Sicht gesehen können 12 *Buchstaben erwartet werden.*
Höchstens $20\,\%$ *Abweichung:*
$12 \cdot 0{,}2 = 2{,}4$
$\mu - 0{,}2 \cdot \mu = 10; \quad \mu + 0{,}2 \cdot \mu = 14$

$B_{20;0,6}(10 \leq X \leq 14) = B_{20;0,6}(X \leq 14) - B_{20;0,6}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}874 - 0{,}128 = 0{,}746$

Die Wahrscheinlichkeit bei höchstens $20\,\%$ *Abweichung vom Mittelwert beträgt etwa* $0{,}746$*.*

Anzahl hinzuzufügender Zifferntasten:

$B_{20;p}(X \geq 15) < 0{,}01$ mit $p = \frac{6}{10+x}$, wobei x die Anzahl hinzuzufügender Zifferntasten bedeutet.

Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.

$1 - B_{20;p}(X \leq 14) < 0{,}01$

$B_{20;p}(X \leq 14) > 0{,}99$

Die Wahrscheinlichkeit $> 0{,}99$ liegt etwa rechts nach dem $2{,}5\sigma$-Bereich.

$\mu = n \cdot p = 20 \cdot p; \quad \sigma = \sqrt{20 \cdot p(1-p)}$

$20 \cdot p + 2{,}5 \cdot \sqrt{20 \cdot p(1-p)} = 14$

$2{,}5 \cdot \sqrt{20 \cdot p(1-p)} = 14 - 20 \cdot p$

$6{,}25 \cdot (20p - 20p^2) = 196 - 560p + 400p^2$

$525p^2 - 685p + 196 = 0$

$p^2 - \frac{685}{525}p + \frac{196}{525} = 0$

$p_{1,2} = 0{,}65 \pm \sqrt{0{,}43 - 0{,}37} = 0{,}65 \pm 0{,}24$

$p_1 \approx 0{,}89; \quad p_2 \approx 0{,}41$

Wir berechnen

$B_{20;0{,}89}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}018$

$B_{20;0{,}41}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9978$

Wir starten mit $p = 0{,}41$ und iterieren gegen größere Werte.

$B_{20;0{,}42}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9971$ $\qquad B_{20;0{,}43}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9962$

$B_{20;0{,}44}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9950$ $\qquad B_{20;0{,}45}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9935$

$B_{20;0{,}46}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9917$ $\qquad B_{20;0{,}47}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9894$

Der gesuchte Wert liegt also zwischen $0{,}46$ und $0{,}47$:

$B_{20;0{,}465}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}991$

$\frac{6}{10+x} = 0{,}465 \qquad | \quad \cdot (10+x)$

$6 = 4{,}65 + 0{,}465x \qquad | \quad -4{,}65;\ :0{,}465$

$x = 2{,}9032 \approx 3$

Probe:

$B_{20;\frac{6}{12}}(X \geq 15) = 1 - B_{20;\frac{6}{12}}(x \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}02069 > 0{,}01$

$B_{20;\frac{6}{13}}(X \geq 15) = 1 - B_{20;\frac{6}{13}}(x \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}00857 < 0{,}01$

Es müssen mindestens drei Zifferntasten hinzugefügt werden.

c) Nullhypothese H_0: $p_0 \leq 0{,}4$
Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0{,}4$
Wegen $p_1 > p_0$ ist ein rechtsseitiger Test durchzuführen.
Stichprobenumfang $n = 80$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$
$B_{80;0,4}(X \geq k) = 1 - B_{80;0,4}(X \leq k-1) \leq 0{,}01$
$B_{80;0,4}(X \leq k-1) > 0{,}99$
Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.
Die Wahrscheinlichkeit $> 0{,}99$ liegt etwa rechts nach dem $2{,}5\sigma$-Bereich.
$\mu = n \cdot p = 80 \cdot 0{,}4 = 32; \quad \sigma = \sqrt{32(1-0{,}4)} = 4{,}38$
$\mu + 2{,}5\sigma = 32 + 2{,}5 \cdot 4{,}38 = 42{,}95$
Wir starten mit $k - 1 = 42$
$B_{80;0,4}(X \leq 42) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9912$ $\qquad$ $B_{80;0,4}(X \leq 41) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9842$
$k - 1 = 42 \;=>\; k = 43$
Ablehnungsbereich $\overline{A} = [43; 44; 45; \dots; 82]$
Annahmebereich $A = [0; 1; 2; \dots; 42]$
Tippt der Affe höchstens 42 Zifferntasten, wir die H_0-Hypothese beibehalten, ansonsten wird sie verworfen.

Aufgabe M10C1

Nach Information des Robert-Koch-Institutes sind in Ost-Deutschland (einschl. Berlin) $32\,\%$ der Bundesbürger über 12 Jahre gegen Grippe geimpft, in West-Deutschland dagegen nur $15\,\%$.
In den westlichen Bundesländern leben $79{,}3\,\%$ aller Bundesbürger über 12 Jahre.

a) Eine Person, die über 12 Jahre alt ist, wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person geimpft?

b) Berechnen Sie, dass von 12 zufällig ausgesuchten Personen aus den östlichen Bundesländern
   (1) keine Person geimpft ist;
   (2) mindestens 10 Personen nicht geimpft sind;
   (3) mehr als 8 und höchstens 10 Personen geimpft sind.

c) Das Robert-Mayer-Gymnasium liegt in West-Deutschland und hat zurzeit 1030 Schülerinnen und Schüler über 12 Jahre.
   Bestimmen Sie einen Schätzwert für die Anzahl der geimpften Schüler dieses Gymnasiums.
   Ermitteln Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl der geimpften Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $95\,\%$ liegt.

d) Personen über 12 Jahre aus den westlichen Bundesländern werden für ein Interview zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie, wie viele Personen man mindestens auswählen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $98\,\%$ mindestens eine geimpfte Person zu erfassen.

e) Von dem verwendeten Impfserum wird behauptet, dass höchstens $10\,\%$ der Geimpften trotz einer Impfung an Grippe erkranken. 300 zufällig ausgewählte Personen werden mit diesem Serum geimpft. Es erkranken 38 Personen.

   Untersuchen Sie die Behauptung in der Art eines Hypothesentests mit dem Signifikanzniveau von $5\,\%$ und geben Sie eine begründete Entscheidung an.
   Beschreiben Sie die Bedeutung der Fehler 1. Art und 2. Art im Zusammenhang dieses Tests.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art im Fall $p = 0{,}1$ und die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art im Fall $p = 0{,}15$.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 10

Lösung M10C1

Lösungslogik

a) *Wahrscheinlichkeit für eine geimpfte Person:*
Da nicht ausgesagt ist, ob die Person aus Ost- oder West-Deutschland stammt, gilt
Person geimpft **und** ostdeutsch **oder** Person geimpft **und** westdeutsch.

b) *Diverse Wahrscheinlichkeiten:*
Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung, Berechnung mit dem WTR.

c) *Schätzwert Anzahl geimpfter Schüler*:
Anzahl Schülerinnen und Schüler gesamt multipliziert mit Prozentsatz-West geimpfter Personen (Erwartungswert der Binomialverteilung).
Ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall von $95\,\%$:
Alternative 1: Anwendung der Sigma-Regeln
Alternative 2: Berechnen der Anzahl k Erfolge deren Wahrscheinlichkeit $0{,}025$ (oder $0{,}975$) ist.

d) Gesucht ist der Stichprobenumfang n. Es soll gelten:
$B_{n;0{,}15}(X \geq 1) \geq 0{,}98$

e) Die H_0-Hypothese behauptet: Höchstens $10\,\%$ der geimpften Personen erkranken. Somit ist $p_0 \leq 0{,}1$. Die H_1-Hypothese wird diese Aussage bezweifeln und behaupten, dass mehr als $10\,\%$ erkranken. Somit ist $p_1 > 0{,}1$, $p_1 > p_0$ Es ist ein rechtsseitiger Test durchzuführen mit einem Stichprobenumfang von $n = 300$ und einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$.
Erläuterung des Fehlers 1. Art bzw. 2. Art siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Wahrscheinlichkeit für eine geimpfte Person:*
$P(Person\ geimpft) = P(geimpftost; ostdeutsch) + P(geimpftwest; westdeutsch)$
$P(Person\ geimpft) = 0{,}32 \cdot 0{,}207 + 0{,}15 \cdot 0{,}793 = 0{,}1852$
Die ausgewählte Person ist mit etwa $18{,}5\,\%$ *geimpft.*

b) *Diverse Wahrscheinlichkeiten:*
A: Keine Person ist geimpft.
$P(A) = B_{12;0{,}32}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0098 \approx 1\,\%$
B: Mindestens 10 Personen sind nicht geimpft.
$P(B) = B_{12;0{,}68}(X \geq 10) = 1 - B_{12;0{,}68}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2078 \approx 20{,}8\,\%$
C: Mehr als 8 und höchstens 10 Personen sind geimpft.
$P(C) = B_{12;0{,}32}(9 \leq X \leq 10) = B_{12;0{,}32}(X \leq 10) - B_{12;0{,}32}(X \leq 8)$
$\overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9999 - 0{,}9972 = 0{,}0027 \approx 0{,}3\,\%$

c) *Schätzwert Anzahl geimpfter Schüler*:
$W = 1030 \cdot 0{,}15 = 154{,}5$
Etwa Schülerinnen und Schüler des Robert-Mayer-Gymnasiums sind geimpft.

Ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall von $95\,\%$*:*
Alternative 1: Anwendung der Sigma-Regeln
Die $1{,}96\sigma$-Umgebung entspricht dem gesuchten Intervall von $95\,\%$
$\mu = n \cdot p = 154{,}5;\quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{154{,}5 \cdot 0{,}85} \approx 11{,}46$
$I = [\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma] = [154{,}5 - 22{,}46; 154{,}5 + 22{,}46] = [132{,}04; 176{,}96]$
$I^* = [132; 177]$
Alternative 2: Berechnen der Anzahl k Erfolge deren Wahrscheinlichkeit $0{,}025$ (bzw. 0,9725) ist.
$B_{1030;0,15}(X \le k) = 0{,}025$
Wir starten eine Iteration nach unten mit dem WTR mit $k = 150$.
$B_{1030;0,15}(X \le 150) = 0{,}367$ $\quad B_{1030;0,15}(X \le 140) = 0{,}11$
$B_{1030;0,15}(X \le 130) = 0{,}0165$ $\quad B_{1030;0,15}(X \le 131) = 0{,}0206$
$B_{1030;0,15}(X \le 132) = 0{,}0256$
Damit ist der gesuchte Wert $k = 132$
$B_{1030;0,15}(X \le k) = 0{,}9725$
Wir starten erneut mit $k = 150$ und iterieren nach oben.
$B_{1030;0,15}(X \le 150) = 0{,}367$ $\quad B_{1030;0,15}(X \le 160) = 0{,}702$
$B_{1030;0,15}(X \le 170) = 0{,}9173$ $\quad B_{1030;0,15}(X \le 180) = 0{,}987$
$B_{1030;0,15}(X \le 179) = 0{,}984$ $\quad B_{1030;0,15}(X \le 178) = 0{,}9804$
$B_{1030;0,15}(X \le 177) = 0{,}976$ $\quad B_{1030;0,15}(X \le 176) = 0{,}9709$
Damit ist der gesuchte Wert $k = 177$
$I = [132; 177]$

d) $B_{n;0,15}(X \ge 1) \ge 0{,}98$
$1 - B_{n;0,15}(X = 0) \ge 0{,}98$
$B_{n;0,15}(X = 0) \le 1 - 0{,}98$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^n \le 0{,}02$
$0{,}85^n \le 0{,}02 \quad | \quad \ln$
$n \cdot \ln(0{,}85) \le \ln(0{,}02) \quad | \quad :\ln(0{,}85)$
$n \ge \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}85)} \approx 24{,}07$
Es müssen mindestens 25 Personen ausgewählt werden.

e) $H_0\colon\ p_0 \le 0{,}1;\quad H_1\colon\ p_1 > 0{,}1$
Rechtsseitiger Test mit $n = 300$ und $\alpha = 0{,}05$.
$B_{300;0,1}(X \ge k) \le 0{,}05$
$1 - B_{300;0,1}(X \le k-1) \le 0{,}05$
$B_{300;0,1}(X \le k-1) \ge 0{,}95$
$A = [0; 1; 2; \dots . k-1];\quad \overline{A} = [k; k+1; k+2; \dots 300]$
Eine Wahrscheinlichkeit von $0{,}95$ liegt rechts des etwa $1{,}64\sigma$-Bereichs.
$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}1 = 30;\quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{30 \cdot 0{,}9} \approx 5{,}20$
$\mu + 1{,}64 \cdot \sigma = 30 + 1{,}64 \cdot 5{,}2 = 39{,}528$
Wir starten mit $k - 1 = 39$:
$B_{300;0,1}(X \le 39) \approx 0{,}9622$ $\quad B_{300;0,1}(X \le 38) \approx 0{,}945$
$k - 1 = 39$
$k = 40$
$A = [0; 1; 2; \dots 39] \quad \overline{A} = [40; 41; 42; \dots 300]$
Da 38 Personen erkrankten ($38 \in A$) ist die H_0-Hypothese beizubehalten.

Ein Fehler der 1. Art entsteht, wenn man die H_0-Hypothese ablehnt, obwohl sie dennoch stimmt. Dies bedeutet im Zusammenhang, dass man aufgrund einer zufällig hohen Anzahl Erkrankter in der Stichprobe annimmt, dass mehr als $10\,\%$ Geimpfter erkranken, obwohl das in Wahrheit nicht stimmt.

Ein Fehler der 2. Art entsteht, wenn man die H_0-Hypothese beibehält, obwohl sie falsch ist. Dies bedeutet im Zusammenhang, dass man aufgrund einer zufällig niedrigen Anzahl Erkrankter in der Stichprobe annimmt, dass höchstens $10\,\%$ Geimpfter erkranken, obwohl das in Wahrheit nicht stimmt.

Fehler der 1. Art bei $p_0 \leq 0{,}1$:
$1 - B_{300;0,1}(X \leq 39) \approx 1 - 0{,}9622 = 0{,}0378 \approx 3{,}8\,\%$
Fehler der 2. Art bei $p_0 \leq 0{,}15$
$B_{300;0,15}(X \leq 39) \approx 0{,}1879 \approx 18{,}8\,\%$