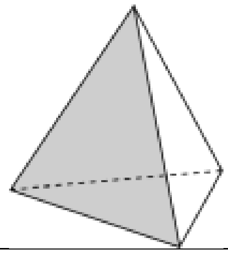
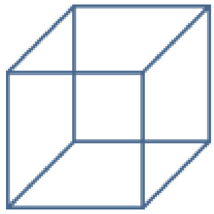
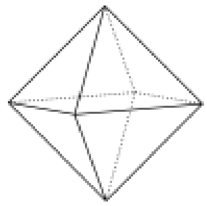
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 BW

Aufgabe C1

Betrachtet werden Körper, die auf jeder Seitenfläche mit einer Zahl beschriftet sind.

Körper	Tetraeder 	Würfel 	Oktaeder 
Anzahle der Seitenflächen	vier	sechs	acht
beschriftet mit	$1; 2; 3; 4$	$1; 2; 3; 4; 5; 6$	$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

Beim Werfen eines Körpers gilt die Zahl als geworfen, auf der der Körper zum Liegen kommt. Dabei werden bei jedem Körper die möglichen Zahlen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit geworfen.

a) Ein Tetraeder wird 100-mal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
A: „Die Zahl 1 wird genau 30-mal geworfen".
B: „Die Zahl 1 wird mindestens 20-mal geworfen."

b) Ermitteln Sie, wie oft man ein Tetraeder mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens einmal die Zahl 1 zu werfen.

c) Ein Tetraeder, ein Würfel und ein Oktaeder werden gleichzeitig geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
C: „Bei allen drei Körpern wird dieselbe Zahl geworfen."
D: „Die Summe der geworfenen Zahlen beträgt 17."

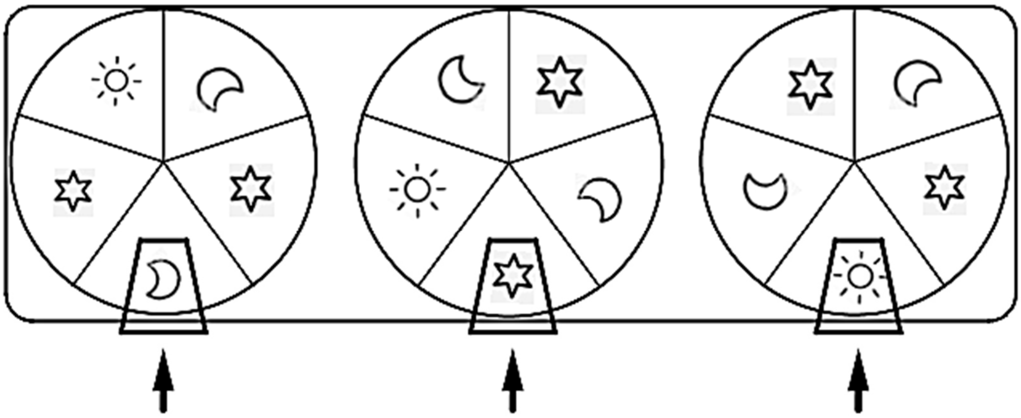
d) Für einen Einsatz von 50 Cent darf ein Spieler ein Tetraeder und einen Würfel einmal werfen. Anschließend erhält er die Anzahl der geworfenen Einsen in Euro ausbezahlt.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers.

e) In einem Sack befinden sich 20 Körper. Es handelt sich dabei um Tetraeder und Oktaeder, wie sie oben beschrieben sind. Einer dieser Körper wird zufällig gezogen und anschließend geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei die Zahl 2 zu werfen, beträgt $15\,\%$.
Berechnen Sie die Anzahl der Tetraeder im Sack.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 BW

Aufgabe C2

Ein Glücksspielautomat enthält drei gleiche Glücksräder, die jeweils wie dargestellt in fünf gleich große Kreissektoren eingeteilt sind. Bei jedem Spiel werden die Räder in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau ein Symbol im jeweiligen Rahmen angezeigt wird. Ein Spieler gewinnt nur dann, wenn alle drei Räder einen Stern zeigen.



a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Spiel $6{,}4\,\%$ beträgt.
Ein Spieler spielt 20 Spiele. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: „Der Spieler gewinnt mehr als einmal."
B: „Der Spieler gewinnt in genau zwei Spielen und diese folgen direkt aufeinander."

b) Eine Spielerin spielt 9 Spiele.
Für ein Ereignis C gilt dabei $P(C) = 0{,}064^a + 9 \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936^b$.
Geben Sie geeignete Werte für a und b an und beschrieben Sie das Ereignis C im Sachzusammenhang.

c) Es wird vermutet, dass das mittlere Rad zu selten ein Sternsymbol zeigt. Deshalb wird die Nullhypothese „Das mittlere Rad zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens zwei Fünfteln ein Sternsymbol." getestet. Man vereinbart ein Signifikanzniveau von $3\,\%$ und einen Stichprobenumfang von 300 Drehungen.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

d) Die Glücksräder des Automaten werden durch drei neue ersetzt, die sich nicht voneinander unterscheiden. Die Glücksräder sind in mehrere gleich große Sektoren unterteilt. Jedes Glücksrad trägt in genau einem Sektor ein Sternsymbol. Man gewinnt bei 50 Spielen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ höchstens einmal.
Bestimmen Sie die minimale Anzahl der Sektoren pro Glücksrad.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 BW

Lösung C1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Bernoulliexperiment, bei dem der Stichprobenumfang gesucht wird.
c) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
d) Berechnung eines Erwartungswertes.
e) Bernoulliexperiment, bei dem ein k-Tupel gesucht wird.

Klausuraufschrieb

a) Tetraeder-Würfe mit $n = 100$ und $P(1) = 0{,}25$.
A: „Die Zahl 1 wird genau 30-mal geworfen".

$B_{100;0,25}(X = 30) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}04575$

B: „Die Zahl 1 wird mindestens 20-mal geworfen."

$B_{100;0,25}(X \geq 20) = 1 - B_{100;0,25}(X \leq 19) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9005$

b) $B_{n;0,25}(X \geq 1) > 0{,}95$
$1 - B_{n;0,25}(X = 0) > 0{,}95$
$B_{n;0,25}(X = 0) < 0{,}05$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^n < 0{,}05 \qquad | \quad ln$
$n \cdot \ln(0{,}75) < \ln(0{,}05) \qquad | \quad : \ln(0{,}75)$
$n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}75)}$
$n > 10{,}41$
Der Tetraeder muss mindestens 11-mal geworfen werden.

c) *Alle drei Körper werden gleichzeitig geworfen*
C: „Jeder Körper zeigt die gleiche Zahl."
$\Omega(C) = \{(111); (222); (333); (444)\}$
$P(C) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$
D: „Die Summe der geworfenen Zahlen beträgt 17."
Die Zahlenfolge des Ergebnisraums entsprechen der Folge „Tetraeder; Würfel; Oktaeder"
$\Omega(D) = \{(3; 6; 8); (4; 5; 8); (4; 6; 7)\}$
$P(D) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

d) *Erwartungswert:*
Der Ergebnisraum dieses Experiments ist:
$\Omega = \{(1; 1); (1; \overline{1}); (\overline{1}; 1); (\overline{1}; \overline{1})\}$
$P(X = 2\,€) = P(1; 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$
$P(X = 1\,€) = P(1; \overline{1}) + P(\overline{1}; 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$
$P(X = 0\,€) = P(\overline{1}; \overline{1}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 BW

Tabelle der Ergebnisse (Von der Auszahlung ist jeweils der Einsatz abgezogen):

X_i	$1{,}50$ €	$0{,}5$ €	$-0{,}50$
p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{15}{24}$
$X_i \cdot p_i$	$0{,}06$ €	$0{,}17$ €	$-0{,}31$ €
$\sum_{i=1}^{3} X_i \cdot p_i$	$0{,}06 + 0{,}17 - 0{,}31 = -0{,}08$		

$E(X) = -0{,}08$

Der Spieler macht auf lange Sicht gesehen einen Verlust von $0{,}08$ €/Spiel.

e) *Anzahl der Tetraeder:*
Aufgaben mit einem 20-Tupel.
Die Anzahl der Tetraeder sei m, dann ist die Anzahl der Oktaeder $20 - m$.
Der Ergebnisraum ist entweder eine 2 mit dem Tetraeder oder eine 2 mit dem Oktaeder. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit soll $0{,}15$ sein.

$P(2\ Tetraeder; 2\ Oktaeder) = \frac{m}{20} \cdot \frac{1}{4} + \frac{20-m}{20} \cdot \frac{1}{8} = 0{,}15$

$\frac{2m+20-m}{160} = 0{,}15 \quad | \quad \cdot 160$

$m + 20 = 24 \quad | \quad -20$

$m = 4$

Es sind 4 Tetraeder im Sack.

Lösung C2

Lösungslogik

a) Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit für 3-mal Stern.
Berechnung bestimmter Ereignisse.
b) Ermitteln von Exponenten eines bestimmten Bernoulli-Experiments.
c) Formulierung eines Hypothesentests.
d) Ermitteln der Anzahl von Sektoren von Glücksrädern für eine vorgegebene Gewinnwahrscheinlichkeit.

Klausuraufschrieb

a) *Gewinnwahrscheinlichkeit für 3-mal Stern.*

$P(3 - mal\ Stern) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125} = 0{,}064 = 6{,}4\ \%$

Berechnung bestimmter Ereignisse:
A: „Der Spieler gewinnt mehr als einmal."
Bernoulli-Experiment mit $n = 20$ und $P = 0{,}064$ für Erfolg.

$B_{20;0{,}064}(X \geq 2) = 1 - B_{20;0{,}064}(X \leq 1) \overset{WTR}{\approx} 0{,}3693$

B: „Der Spieler gewinnt in genau zwei Spielen und diese folgen direkt aufeinander."
Das Ereignis „Gewinn bei genau zwei aufeinanderfolgenden Spielen" kommt bei einem Stichprobenumfang von $n = 20$ genau 19-mal vor.

$P(B) = 19 \cdot 0{,}064^2 \cdot (1 - 0{,}064)^{18} = 0{,}0237$

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 BW

b) *Exponenten eines Bernoulli-Experiments:*

Stichprobenumfang ist $n = 9$ mit $p = 0{,}064$ für Erfolg.

$P(C) = B_{9;0,64}(X \geq 8) = \binom{9}{9} \cdot 0{,}064^9 \cdot 0{,}936^0 + \binom{9}{8} \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936^1$

$B_{9;0,64}(X \geq 8) = 0{,}064^9 + 9 \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936$

$a = 9;\ \ b = 1$

Die Spielering gewinnt bei 9 Spielen mindestens 8-mal.

c) *Formulierung eines Hypothesentests.*

$H_0:\ \ p_0 \geq \frac{2}{5};\quad H_1:\ \ p_1 < \frac{2}{5};\quad n = 300;\ \ \alpha = 3\,\%$

$p_1 < p_0$: => linksseitiger Test.

$\overline{A} = [0; 1; 2;\ 3; \dots; k];\quad A = [k+1; k+2;\ \ k+3; \dots 300]$

$B_{300;0,4}(X \leq k) \leq 0{,}03$

$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}4 = 120$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{120 \cdot 0{,}6} = 6{,}92 \approx 9$

$\alpha = 3\,\%$ entspricht etwa dem 2σ-Bereich.

$\mu - 2 \cdot \sigma = 120 - 2 \cdot 9 \approx 102$

$B_{300;0,4}(X \leq 102) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}019;\quad B_{300;0,4}(X \leq 103) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}025$

$B_{300;0,4}(X \leq 104) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}033$

$\overline{A} = [0; 1; 2;\ 3; \dots; 103];\quad A = [104; 105; 106; \dots 300]$

Entscheidungsregel:

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn nur höchstens 103-mal Stern erscheint, ansonsten wird sie beibehalten.

d) *Anzahl von Sektoren von Glücksrädern für vorgegebene Gewinnwahrscheinlichkeit:*

Die Anzahl Sektoren pro Glücksrad sei a. Dann gilt:

Die Wahrscheinlichkeit für Gewinn (dreimal das Stern-Symbol) ist jetzt

$P(Gewinn) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^3};\quad P(\overline{Gewinn}) = 1 - \frac{1}{a^3} = \frac{a^3-1}{a^3}$

Gesucht ist somit p mit $p = \frac{1}{a^3}$.

$B_{50;p}(X \leq 1) \geq 0{,}99$

Verschiedene Werte mit dem WTR:

$B_{50;0,02}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}7357;\quad B_{50;0,01}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9106;$

$B_{50;0,005}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}97386;\quad B_{50;0,004}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}98274;$

$B_{50;0,003}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}989;\quad B_{50;0,002}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9854;$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit $p \approx 0{,}002$

$\frac{1}{a^3} = 0{,}002$

$a^3 = 500 \qquad | \quad \sqrt[2]{\ }$

$a \approx 7{,}97$

Probe mit : $a = 8$

$B_{50;\frac{1}{8^3}}(X \leq 1) \approx 0{,}9956$

Probe mit : $a = 7$

$B_{50;\frac{1}{7^3}}(X \leq 1) \approx 0{,}9905$

Probe mit : $a = 6$

$B_{50;\frac{1}{7^3}}(X \leq 1) \approx 0{,}9773$

Die minimale Anzahl Sektoren pro Glücksrad ist 7.