Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 BW

Lösung C1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Bernoulliexperiment, bei dem der Stichprobenumfang gesucht wird.
c) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
d) Berechnung eines Erwartungswertes.
e) Bernoulliexperiment, bei dem ein k-Tupel gesucht wird.

Klausuraufschrieb

a) Tetraeder-Würfe mit $n = 100$ und $P(1) = 0{,}25$.
A: „Die Zahl 1 wird genau 30-mal geworfen".
$B_{100;0,25}(X = 30) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}04575$
B: „Die Zahl 1 wird mindestens 20-mal geworfen."
$B_{100;0,25}(X \geq 20) = 1 - B_{100;0,25}(X \leq 19) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9005$

b) $B_{n;0,25}(X \geq 1) > 0{,}95$
$1 - B_{n;0,25}(X = 0) > 0{,}95$
$B_{n;0,25}(X = 0) < 0{,}05$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^n < 0{,}05 \quad | \quad ln$
$n \cdot \ln(0{,}75) < \ln(0{,}05) \quad | \quad : \ln(0{,}75)$
$n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}75)}$
$n > 10{,}41$
Der Tetraeder muss mindestens 11-mal geworfen werden.

c) *Alle drei Körper werden gleichzeitig geworfen*
C: „Jeder Körper zeigt die gleiche Zahl."
$\Omega(C) = \{(111); (222); (333); (444)\}$
$P(C) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$
D: „Die Summe der geworfenen Zahlen beträgt 17."
Die Zahlenfolge des Ergebnisraums entsprechen der Folge „Tetraeder; Würfel; Oktaeder"
$\Omega(D) = \{(3; 6; 8); (4; 5; 8); (4; 6; 7)\}$
$P(D) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

d) *Erwartungswert:*
Der Ergebnisraum dieses Experiments ist:
$\Omega = \{(1; 1); (1; \overline{1}); (\overline{1}; 1); (\overline{1}; \overline{1})\}$
$P(X = 2\,€) = P(1; 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$
$P(X = 1\,€) = P(1; \overline{1}) + P(\overline{1}; 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$
$P(X = 0\,€) = P(\overline{1}; \overline{1}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 BW

Tabelle der Ergebnisse (Von der Auszahlung ist jeweils der Einsatz abgezogen):

X_i	$1{,}50$ €	$0{,}5$ €	$-0{,}50$
p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{15}{24}$
$X_i \cdot p_i$	$0{,}06$ €	$0{,}17$ €	$-0{,}31$ €
$\sum_{i=1}^{3} X_i \cdot p_i$	$0{,}06 + 0{,}17 - 0{,}31 = -0{,}08$		

$E(X) = -0{,}08$

Der Spieler macht auf lange Sicht gesehen einen Verlust von $0{,}08$ *€/Spiel.*

e) *Anzahl der Tetraeder:*

Aufgaben mit einem 20-Tupel.

Die Anzahl der Tetraeder sei m, dann ist die Anzahl der Oktaeder $20 - m$.

Der Ergebnisraum ist entweder eine 2 mit dem Tetraeder oder eine 2 mit dem Oktaeder. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit soll $0{,}15$ sein.

$P(2\ Tetraeder; 2\ Oktaeder) = \frac{m}{20} \cdot \frac{1}{4} + \frac{20-m}{20} \cdot \frac{1}{8} = 0{,}15$

$\frac{2m+20-m}{160} = 0{,}15 \quad | \quad \cdot 160$

$m + 20 = 24 \quad | \quad -20$

$m = 4$

Es sind 4 *Tetraeder im Sack.*

Lösung C2

Lösungslogik

a) Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit für 3-mal Stern.
Berechnung bestimmter Ereignisse.

b) Ermitteln von Exponenten eines bestimmten Bernoulli-Experiments.

c) Formulierung eines Hypothesentests.

d) Ermitteln der Anzahl von Sektoren von Glücksrädern für eine vorgegebene Gewinnwahrscheinlichkeit.

Klausuraufschrieb

a) *Gewinnwahrscheinlichkeit für* 3*-mal Stern.*

$P(3 - mal\ Stern) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125} = 0{,}064 = 6{,}4\ \%$

Berechnung bestimmter Ereignisse:

A: „Der Spieler gewinnt mehr als einmal.“

Bernoulli-Experiment mit $n = 20$ und $P = 0{,}064$ für Erfolg.

$B_{20;0{,}064}(X \geq 2) = 1 - B_{20;0{,}064}(X \leq 1) \overset{WTR}{\approx} 0{,}3693$

B: „Der Spieler gewinnt in genau zwei Spielen und diese folgen direkt aufeinander.“

Das Ereignis „Gewinn bei genau zwei aufeinanderfolgenden Spielen“ kommt bei einem Stichprobenumfang von $n = 20$ genau 19-mal vor.

$P(B) = 19 \cdot 0{,}064^2 \cdot (1 - 0{,}064)^{18} = 0{,}0237$

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 BW

b) *Exponenten eines Bernoulli-Experiments:*

Stichprobenumfang ist $n = 9$ mit $p = 0{,}064$ für Erfolg.

$P(C) = B_{9;0,64}(X \geq 8) = \binom{9}{9} \cdot 0{,}064^9 \cdot 0{,}936^0 + \binom{9}{8} \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936^1$

$B_{9;0,64}(X \geq 8) = 0{,}064^9 + 9 \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936$

$a = 9;\ \ b = 1$

Die Spielering gewinnt bei 9 Spielen mindestens 8-mal.

c) *Formulierung eines Hypothesentests.*

$H_0:\ \ p_0 \geq \frac{2}{5};\quad H_1:\ \ p_1 < \frac{2}{5};\quad n = 300;\ \ \alpha = 3\,\%$

$p_1 < p_0$: => linksseitiger Test.

$\overline{A} = [0; 1; 2;\ 3; \ldots; k];\quad A = [k+1; k+2;\ \ k+3; \ldots 300]$

$B_{300;0,4}(X \leq k) \leq 0{,}03$

$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}4 = 120$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{120 \cdot 0{,}6} = 6{,}92 \approx 9$

$\alpha = 3\,\%$ entspricht etwa dem 2σ-Bereich.

$\mu - 2 \cdot \sigma = 120 - 2 \cdot 9 \approx 102$

$B_{300;0,4}(X \leq 102) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}019;\quad B_{300;0,4}(X \leq 103) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}025$

$B_{300;0,4}(X \leq 104) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}033$

$\overline{A} = [0; 1; 2;\ 3; \ldots; 103];\quad A = [104; 105; 106; \ldots 300]$

Entscheidungsregel:

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn nur höchstens 103-mal Stern erscheint, ansonsten wird sie beibehalten.

d) *Anzahl von Sektoren von Glücksrädern für vorgegebene Gewinnwahrscheinlichkeit:*

Die Anzahl Sektoren pro Glücksrad sei a. Dann gilt:

Die Wahrscheinlichkeit für Gewinn (dreimal das Stern-Symbol) ist jetzt

$P(Gewinn) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^3};\quad P\left(\overline{Gewinn}\right) = 1 - \frac{1}{a^3} = \frac{a^3-1}{a^3}$

Gesucht ist somit p mit $p = \frac{1}{a^3}$.

$B_{50;p}(X \leq 1) \geq 0{,}99$

Verschiedene Werte mit dem WTR:

$B_{50;0,02}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}7357;\quad B_{50;0,01}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9106;$

$B_{50;0,005}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}97386;\quad B_{50;0,004}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}98274;$

$B_{50;0,003}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}989;\quad B_{50;0,002}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9854;$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit $p \approx 0{,}002$

$\frac{1}{a^3} = 0{,}002$

$a^3 = 500 \qquad | \quad \sqrt[2]{\ }$

$a \approx 7{,}97$

Probe mit : $a = 8$

$B_{50;\frac{1}{8^3}}(X \leq 1) \approx 0{,}9956$

Probe mit : $a = 7$

$B_{50;\frac{1}{7^3}}(X \leq 1) \approx 0{,}9905$

Probe mit : $a = 6$

$B_{50;\frac{1}{7^3}}(X \leq 1) \approx 0{,}9773$

Die minimale Anzahl Sektoren pro Glücksrad ist 7.