Abitur allg. Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 Nachtermin BW

Aufgabe C1

Ein Holzkörper, der zwölf Seiten besitzt, wird zum Würfeln benutzt. Dabei kommt jede der zwölf Seiten mit derselben Wahrscheinlichkeit nach oben zu liegen. Jede Seite ist gemäß folgender Tabelle mit einer Zahl beschriftet.

Zahl	1	2	3	4
Anzahl der Seiten	5	1	4	2

Bei jedem Wurf gilt die Zahl als geworfen, die auf der oben liegenden Seite steht.

a) Der Körper wird achtmal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: „Die Zahl 2 wird nicht geworfen."
B: „Die Zahl 1 wird mindestens dreimal geworfen."
C: „Es werden genau sechs ungerade Zahlen geworfen und diese folgen unmittelbar aufeinander."

b) Eine Klasse will für einen guten Zweck beim Schulfest folgendes Spiel anbieten:
Für einen Euro Einsatz darf ein Spieler genau dreimal mit dem Körper würfeln. Beträgt die Summe der drei geworfenen Zahlen höchstens 4, dann bekommt der Spieler fünf Euro ausbezahlt. In allen anderen Fällen wird nichts ausbezahlt.
Bestimmen Sie den Gewinn, mit dem die Klasse durchschnittlich pro Spiel rechnen kann.

c) Es wird vermutet, dass beim Würfeln mit dem Körper zu selten die Zahl 3 geworfen wird. Um dies zu untersuchen, wird die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 3 beträgt mindestens $\frac{1}{3}$." auf der Grundlage einer Stichprobe von 100 Würfen und einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ getestet.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

d) Einige Seiten des Körpers sind grün. Bei zehnmaligem Würfeln wird mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als $15\,\%$ mindestens achtmal grün geworfen.
Bestimmen Sie die Anzahl der grünen Seiten, die der Körper höchstens haben kann.

Abitur allg. Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 Nachtermin BW

Aufgabe C2

Ein Händler bezieht sehr viele Bauteile. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Bauteil defekt ist, beträgt $20\,\%$.

a) Der Händler entnimmt einer Lieferung 100 Bauteile und untersucht sie nacheinander. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
A: „Genau 20 Bauteile sind defekt."
B: „Es sind mindestens 15, aber weniger als 26 Bauteile defekt."
C: „Genau 19 Bauteile sind defekt, darunter auch das zuerst untersuchte."

b) Ermitteln Sie, wie viele Bauteile der Händler einer Lieferung mindestens entnehmen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindesten $99\,\%$ mindestens fünf funktionierende Bauteile darunter sind.

c) Der Händler weist die Kunden auf die hohe Defektwahrscheinlichkeit hin und bietet zwei Kaufoptionen an.
Option 1: Der Kunde bezahlt für ein Bauteil 4 Euro, die er zurückbekommt, falls das Bauteil defekt ist.
Option 2: Der Kunde bezahlt für ein Bauteil 3 Euro, die er nicht zurückbekommt, falls das Bauteil defekt ist.
$30\,\%$ der Bauteile werden gemäß Option 1 gekauft, $70\,\%$ gemäß Option 2. Alle Kunden, die Option 1 gewählt haben, fordern ihr Geld im Falle eines Defekts zurück.
Bestimmen Sie die durchschnittlichen Einnahmen, die der Händler langfristig beim Verkauf eines Bauteils erzielt.

d) Bei einer neuen Lieferung befürchtet der Händler, dass die Defektwahrscheinlichkeit größer geworden ist. Ob er die Lieferung zurücksendet, macht er vom Ergebnis eines Hypothesentests abhängig. Er testet die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil defekt ist, beträgt höchstens $20\,\%$." auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Bauteilen auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Abitur allg. Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 Nachtermin BW

Lösung C1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Aufgabe zum Erwartungswert.
c) Linksseitiger Hypothesentest.
d) Berechnung des prozentualen Anteils grüner Seiten.

Klausuraufschrieb

a) Holzkörper-Würfe mit $n = 8$.

A: „Die Zahl 2 wird nicht geworfen."

Die Wahrscheinlichkeit für 2 ist $\frac{1}{12}$

$B_{8;\frac{1}{12}}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}4985$

B: „Die Zahl 1 wird mindestens dreimal geworfen."

Die Wahrscheinlichkeit für 1 ist $\frac{5}{12}$

$B_{8;\frac{5}{12}}(X \geq 3) = 1 - B_{8;\frac{5}{12}}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}7185$

C: „Es werden genau sechs ungerade Zahlen geworfen und dies folgen unmittelbar aufeinander."

Die Wahrscheinlichkeit für ungerade Zahlen ist $\frac{9}{12}$

Der Pfad kommt insgesamt nur dreimal vor. Somit:

$P(C) = 3 \cdot \left(\frac{9}{12}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^2 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0334$

b) Wahrscheinlichkeit für Augensumme höchstens 4 bei 3 Würfen:

$\Omega = \{111; 112; 121; 211\}$

$P(Augensumme \leq 4) = \left(\frac{5}{12}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = 0{,}1157$

$E(X) = 4 \cdot 0{,}1157 - 1 * (1 - 0{,}1157) = -0{,}4213$

Die Klasse kann durchschnittlich mit einem Gewinn von $0{,}42$ € pro Spiel rechnen.

c) $H_0: p_0 \geq \frac{1}{3}$; $H_1: p_1 < \frac{1}{3}$

$p_1 < p_0$ ➔ linksseitiger Test

$\overline{A} = [0; k]$; $A = [k + 1; 100]$; $\alpha = 0{,}05$

$B_{100;\frac{1}{3}}(X \leq k) \leq 0{,}05$

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{3} = 33{,}33$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{33{,}33 \cdot \frac{2}{3}} = 4{,}7 \approx 5$

$k_{Start} = \mu - 1{,}5\sigma = 33 - 7 = 26$

k	$B_{100;\frac{1}{3}}(X \leq k)$
26	$0{,}0714$
25	$0{,}045$

Fällt höchstens 25 mal die 3, so wird die Nullhypothese verworfen.

Abitur allg. Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 Nachtermin BW

d) *Anzahl grüner Seiten:*

$B_{10;p}(X \geq 8) < 0{,}15$

$B_{10;p}(X \leq 7) > 0{,}85$

p	$B_{10;p}(X \leq 7)$
0,5	0,9453
0,6	0,8327
0,54	0,911
0,55	0,90
0,56	0,88
0,57	0,87
0,58	0,86
0,59	0,84

Die Wahrscheinlichkeit für grüne Seiten darf höchstens $0{,}58$ sein.

$0{,}58 \cdot 12 = 6{,}96$

Die Anzahl grüner Seiten darf höchstens 7 sein.

Lösung C2

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Berechnung eines Stichprobenumfangs der Binomialverteilung.
c) Berechnung eines Erwartungswertes.
d) Formulierung eines Hypothesentests.

Klausuraufschrieb

a) Bauteilkontrolle mit $n = 100$ und $p = 0{,}2$ für defekte Teile.

A: „Genau 20 Bauteile sind defekt.“

$B_{100;0,2}(X = 20) = \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0993$

B: „Es sind mindestens 15, aber weniger als 26 Bauteile defekt.“

$B_{100;0,2}(15 \leq X \leq 25) = B_{100;0,2}(X \leq 25) - B_{100;0,2}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}8321$

C: „Genau 19 Bauteile sind defekt, darunter auch das zuerst untersuchte.“

$P(C) = 0{,}2 \cdot B_{100;0,2}(X = 18) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}01818$

b) *Berechnung eines Stichprobenumfangs:*

$B_{n;0,8}(X \geq 5) \geq 0{,}99$

$B_{n;0,8}(X \leq 4) < 0{,}01$

n	$B_{n;0,8}(X \leq 4)$
10	0,00637
09	0,0196
08	0,0563

Der Händler muss mindestens 10 Bauteile untersuchen.

Abitur allg. Gymnasium Wahlteil Stochastik 2019 Nachtermin BW

c) *Berechnung eines Erwartungswertes.*
Wahrscheinlichkeit Option 1 und defekt:
$p = 0{,}3 \cdot 0{,}2$
Wahrscheinlichkeit Option 1 und intakt:
$p = 0{,}3 \cdot 0{,}8$
Wahrscheinlichkeit Option 2
$p = 0{,}7$
$E(X) = -4{,}0 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 4{,}0 \cdot 03 \cdot 0{,}8 + 3{,}0 \cdot 0{,}7 = 2{,}82$
Die durchschnittlichen Einnahmen des Händlers betragen $2{,}82$ € *pro Bauteil.*

d) $H_0: p_0 \leq 0{,}2;\quad H_1:\ p_1 > 0{,}2$
$p_1 > p_0$ ➔ rechtsseitiger Test
$A = [0; k-1];\ \ \overline{A} = [k; 200];\ \ \alpha = 0{,}05$
$B_{200;0,2}(X \geq k) \leq 0{,}05$
$B_{200;0,2}(X \leq k-1) > 0{,}95$
$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}2 = 40$
$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{40 \cdot 0{,}8} = 5{,}65$
$k_{Start} = \mu + 1{,}5\sigma = 40 + 8{,}49 \approx 48$

$k-1$	$B_{200;0,2}(X \leq k-1)$
48	0,9309
49	0,9506

$k - 1 = 49$
$k = 50$
Wenn mindestens 50 *Bauteile defekt sind, wird die Nullhypothese abgelehnt.*