Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2020 BW

Aufgabe C1

Auf einer Meeresfarm werden Muscheln zur Perlengewinnung gezüchtet. Erfahrungsgemäß bringen $70\,\%$ der Muscheln keine Perlen hervor. In den restlichen Muscheln befindet sich jeweils genau eine Perle, aber nur $10\,\%$ der Perlen entsprechen dem geforderten Qualitätsstandard.

a) Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
 A: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln ist keine Perle.
 B: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mindestens zwei Perlen.
 C: In 100 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mehr als drei Perlen, die dem geforderten Qualitätsstandard entsprechen.

b) Ermitteln Sie die Anzahl der Muscheln, die man mindestens öffnen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens eine Perle zu finden ist.

c) Ein Muschelzüchter hat eine neue Zuchtmethode entwickelt. Er behauptet, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Muschel eine Perle hervorbringt, zu erhöhen. Um die Behauptung zu überprüfen, wird die Nullhypothese „Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $30\,\%$ bringt eine Muschel eine Perle hervor." getestet. Man vereinbart einen Stichprobenumfang von 200 Muscheln und ein Signifikanzniveau von $5\,\%$.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

d) Ein Goldschmied hat in einer Schale weiße und schwarze Perlen. Es sind mehr schwarze als weiße Perlen. Insgesamt sind es 21 Perlen. Der Goldschmied zieht zufällig zwei Perlen ohne Zurücklegen aus der Schale. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Farben der beiden Perlen unterscheiden, beträgt $\frac{8}{21}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der schwarzen Perlen, die vor dem Ziehen in der Schale waren.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2020 BW

Aufgabe C2

In einer Urne befinden sich drei rote, eine weiße und sechs schwarze Kugeln.

a) Es werden nacheinander acht Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
   A: Genau drei dieser Kugeln sind rot.
   B: Mehr als zwei und weniger als sechs dieser Kugeln sind rot.
   C: Die ersten drei Kugeln haben dieselbe Farbe.

b) Geben Sie im Zusammenhang mit der oben beschriebenen Urne ein Zufallsexperiment und ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$\binom{5}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2$$

c) Bei einem Spiel werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Ist die weiße Kugel dabei, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück. Bei zwei Kugeln mit gleicher Farbe enthält er vier Euro ausbezahlt. In allen anderen Fällen gibt es keine Auszahlung.
   Bestimmen Sie die Höhe des Einsatzes, so dass dieses Spiel fair ist.

d) In einer anderen Urne befinden sich 200 schwarze und fünf rote Kugeln. Ein Spieler zieht 15-mal nacheinander eine Kugel und legt sie jeweils direkt wieder zurück. Er gewinnt, wenn er mindestens eine rote Kugel zieht.
   Berechnen Sie seine Gewinnwahrscheinlichkeit.

   Dem Spieler wird folgendes Angebot gemacht. Er kann auf Züge verzichten, dafür werden weitere rote Kugeln in die Urne gelegt. Der Spieler muss vor dem Ziehen erklären, auf wie viele Züge er verzichtet. Für jeden weggelassenen Zug werden zwei rote Kugeln zusätzlich in die Urne gelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zahl z der weggelassenen Züge berechnet werden kann. Ermitteln Sie, auf wie viele Züge er verzichten muss, damit seine Gewinnwahrscheinlichkeit am größten ist.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2020 BW

Lösung C1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Bernoulliexperiment, bei dem der Stichprobenumfang gesucht wird.
c) Linksseitiger Hypothesentest mit Stichprobenumfang $n = 200$, $p_0 = 0{,}3$, $p_1 > p_0$ und $\alpha = 5\,\%$.
d) Urnenmodell mit Ziehen ohne Zurücklegen und Berechnung der Anzahl schwarzer Perlen des Zufallsexperiments.

Klausuraufschrieb

a) A: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln ist keine Perle.

$B_{10;0,3}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}02824$

B: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mindestens zwei Perlen.

$B_{10;0,3}(X \geq 2) = 1 - B_{10;0,7}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}8507$

C: In 100 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mehr als drei Perlen, die dem geforderten Qualitätsstandard entsprechen.

p für Perlen mit gefordertem Qualitätsstandard: $p = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$

$B_{100;0,03}(X \geq 4) = 1 - B_{100;0,03}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}3528$

b) Mindestanzahl von Muscheln (Stichprobenumfang)

$B_{n;0,30}(X \geq 1) > 0{,}95$

$1 - B_{n;0,3}(X = 0) > 0{,}95$

$B_{n;0,3}(X = 0) < 0{,}05$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^n < 0{,}05 \quad | \quad ln$

$n \cdot ln(0{,}7) < ln\,(0{,}05) \quad | \quad : ln(0{,}7)$

$n > \frac{ln\,(0{,}05)}{ln\,(0{,}7)}$

$n > 8{,}399$

Man muss mindestens 9 *Muscheln öffnen.*

c) *Hypothesentest*

$n = 200;\ H_0\!: p_0 \geq 0{,}3;\ \ H_1\!: p_1 > p_0;\ \ \alpha = 0{,}05$

Wegen $p_1 > p_0$ handelt es sich um einen linksseitigen Test.

$A = [0; k-1];\ \ \overline{A} = [k; 200]$

$B_{200;0,30}(X \geq k) < 0{,}05$

$1 - B_{200;0,30}(X \leq k-1) < 0{,}05$

$B_{200;0,30}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$

$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}3 = 60$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{60 \cdot 0{,}7} = 6{,}48$

$\alpha = 0{,}05$ liegt etwa im $1{,}5\sigma$-Bereich

$k_{Start} = \mu + 1{,}5\sigma = 60 + 10 = 70$

$k-1$	$B_{200;0,30}(X \leq k-1)$
70	0,9458
71	0,9604

$k - 1 = 71 \;\Rightarrow\; k = 72$

Haben mindestens 72 geöffnete Muscheln eine Perle, so wird die H_0-Hypothese abgelehnt.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2020 BW

d) *Urnenmodell ohne Zurücklegen:*
Wir haben x weiße und y schwarze Perlen. Insgesamt 21 Stück.
Die Wahrscheinlichkeit für weiße Perlen ist somit
$P(w) = \frac{x}{81}$ im ersten Zug.
Die Wahrscheinlichkeit für schwarze Perlen ist somit
$P(s) = \frac{y}{81}$ im ersten Zug.
Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Perlen:
$P(ws; sw) = \frac{x}{21} \cdot \frac{y}{20} \cdot 2 = \frac{x \cdot y}{210}$
Weiterhin gilt $x + y = 21$ ➔ $x = 21 - y$
$P(ws; sw) = \frac{(21-y) \cdot y}{210} = \frac{8}{21}$
$(21 - y) \cdot y = 80$
$-y^2 + 21y - 80 = 0 \quad | \quad \cdot (-1)$
$y^2 - 21y + 80 = 0$
$y_{1,2} = 10{,}5 \pm \sqrt{110{,}25 - 80} \quad | \quad p/q$-Formel
$y_{1,2} = 10{,}5 \pm \sqrt{30{,}25} = 10{,}5 \pm 5{,}5$
$y_1 = 16;\ \ y_2 = 5$
Es befanden sich 16 schwarze und 5 weiße Perlen in der Schale, da nach Aufgabentext zu Beginn mehr schwarz als weiße Perlen in der Schale waren.

Lösung C2

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Verbale Beschreibung eines mathematisch formulierten Bernoulli-Experiments.
c) Aufgabe zum fairen Erwartungswert eines Glücksspiels.
d) Berechnen verschiedener Wahrscheinlichkeiten für ein verbal vorgegebenes Glücksspiel.

Klausuraufschrieb

a) A: Genau drei dieser Kugeln sind rot.
$B_{8;0,3}(X = 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2541$
B: Mehr als zwei und weniger als sechs dieser Kugeln sind rot.
$B_{8;0,3}(2 < X < 6) = B_{8;0,03}(X \leq 5) - B_{8;0,03}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}4369$
C: Die ersten drei Kugeln haben dieselbe Farbe.
Die möglichen Ereignisse der ersten drei Ziehungen sind $P(rrr) + P(sss) + P(www)$. Da über die restlichen fünf Ziehungen keine Aussage gemacht ist, ist deren Einzelwahrscheinlichkeit jeweils 1 und es gilt:
$P(C) = 0{,}3^3 \cdot 1^5 + 0{,}6^3 \cdot 1^5 + 0{,}1^3 \cdot 1^5 = 0{,}027 + 0{,}216 + 0{,}001$
$P(C) = 0{,}244$

b) *Verbale Beschreibung eines mathematisch formulierten Experiments:*
Der angegebene Term ist die Bernoulli-Formel. Das Experiment lautet:
Es werden nacheinander fünf Kugeln mit Zurücklegen gezogen, man zieht genau drei schwarze Kugeln.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2020 BW

c) *Ermittlung des fairen Erwartungswertes eines Glücksspiels.*

Zunächst Bestimmung der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten:

$P(1\ weiße\ Kugel) = P(w\overline{w}, \overline{w}w) = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} = \frac{2}{10}$

$P(2\ Kugeln\ gleiche\ Farbe) = P(ss; rr) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

$P(alle\ anderen) = 1 - P(w\overline{w}, \overline{w}w) - P(ss; rr) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$

Der Einsatz sei a.

X_i	$4{,}00\,€ - a\,€$	$a - a\,€$	$-a\,€$	
p_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	
$X_i \cdot p_i$	$1{,}60\,€ - 0{,}4a\,€$	$0 \cdot a\,€$	$-0{,}4\,€$	
$\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i$	$1{,}60\,€ - 0{,}4a\,€ + 0\,€ - 0{,}4a\,€$			

Das Spiel soll fair sein, also $E(x) = 0$

$1{,}60\,€ - 0{,}4a\,€ + 0\,€ - 0{,}4a\,€ = 0\,€$

$1{,}60\,€ = 0{,}8a\,€$

$a = 2\,€$

Der Einsatz muss $2\,€$ *betragen, damit das Spiel fair ist.*

d) *Berechnung einer Gewinnwahrscheinlichkeit:*

Gewinnwahrscheinlichkeit für mindestens eine rote Kugeln aus 200 schwarzen und 5 roten Kugeln bei 15-mal Ziehen mit Zurücklegen:

$B_{15;0,025}(X \geq 1) = 1 - B_{15;0,025}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}316$

Aufstellung eines Terms:

$B_{15-z;\frac{5+2z}{205+2z}}(X \geq 1) = 1 - B_{15-z;\frac{5+2z}{205+2z}}(X = 0) = 1 - \binom{15-z}{0} \cdot \left(\frac{5+2z}{205+2z}\right)^0 \cdot \left(\frac{200}{205+2z}\right)^{15-z}$

$B_{15-z;\frac{5+2z}{205+2z}}(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{200}{205+2z}\right)^{15-z}$

Bestimmung des Gewinnmaximums:

z	$1 - \left(\frac{200}{205+2z}\right)^{15-z}$
3	0,4740
4	0,4998
5	0,5148
6	0,5201
7	0,5162

Der Spieler muss auf sechs Züge verzichten, um seine Gewinnwahrschein-lichkeit zu maximieren.