Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2020 BW

Lösung C1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Bernoulliexperiment, bei dem der Stichprobenumfang gesucht wird.
c) Linksseitiger Hypothesentest mit Stichprobenumfang $n = 200$, $p_0 = 0{,}3$, $p_1 > p_0$ und $\alpha = 5\,\%$.
d) Urnenmodell mit Ziehen ohne Zurücklegen und Berechnung der Anzahl schwarzer Perlen des Zufallsexperiments.

Klausuraufschrieb

a) A: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln ist keine Perle.

$B_{10;0,3}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}02824$

B: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mindestens zwei Perlen.

$B_{10;0,3}(X \geq 2) = 1 - B_{10;0,7}(X \leq 1) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}8507$

C: In 100 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mehr als drei Perlen, die dem geforderten Qualitätsstandard entsprechen.

p für Perlen mit gefordertem Qualitätsstandard: $p = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$

$B_{100;0,03}(X \geq 4) = 1 - B_{100;0,03}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}3528$

b) Mindestanzahl von Muscheln (Stichprobenumfang)

$B_{n;0,30}(X \geq 1) > 0{,}95$

$1 - B_{n;0,3}(X = 0) > 0{,}95$

$B_{n;0,3}(X = 0) < 0{,}05$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^n < 0{,}05 \qquad | \quad ln$

$n \cdot ln(0{,}7) < ln\,(0{,}05) \qquad | \quad : ln(0{,}7)$

$n > \frac{ln\,(0{,}05)}{ln\,(0{,}7)}$

$n > 8{,}399$

Man muss mindestens 9 Muscheln öffnen.

c) *Hypothesentest*

$n = 200$; H_0: $p_0 \geq 0{,}3$; H_1: $p_1 > p_0$; $\alpha = 0{,}05$

Wegen $p_1 > p_0$ handelt es sich um einen linksseitigen Test.

$A = [0; k-1]$; $\overline{A} = [k; 200]$

$B_{200;0,30}(X \geq k) < 0{,}05$

$1 - B_{200;0,30}(X \leq k-1) < 0{,}05$

$B_{200;0,30}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$

$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}3 = 60$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)} = \sqrt{60 \cdot 0{,}7} = 6{,}48$

$\alpha = 0{,}05$ liegt etwa im $1{,}5\sigma$-Bereich

$k_{Start} = \mu + 1{,}5\sigma = 60 + 10 = 70$

$k-1$	$B_{200;0,30}(X \leq k-1)$
70	$0{,}9458$
71	$0{,}9604$

$k - 1 = 71 \;\rightarrow\; k = 72$

Haben mindestens 72 geöffnete Muscheln eine Perle, so wird die H_0-Hypothese abgelehnt.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2020 BW

d) *Urnenmodell ohne Zurücklegen:*
Wir haben x weiße und y schwarze Perlen. Insgesamt 21 Stück.
Die Wahrscheinlichkeit für weiße Perlen ist somit
$P(w) = \frac{x}{81}$ im ersten Zug.
Die Wahrscheinlichkeit für schwarze Perlen ist somit
$P(s) = \frac{y}{81}$ im ersten Zug.
Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Perlen:
$P(ws; sw) = \frac{x}{21} \cdot \frac{y}{20} \cdot 2 = \frac{x \cdot y}{210}$
Weiterhin gilt $x + y = 21$ ➔ $x = 21 - y$
$P(ws; sw) = \frac{(21-y) \cdot y}{210} = \frac{8}{21}$
$(21 - y) \cdot y = 80$
$-y^2 + 21y - 80 = 0 \qquad | \quad \cdot (-1)$
$y^2 - 21y + 80 = 0$
$y_{1,2} = 10{,}5 \pm \sqrt{110{,}25 - 80} \qquad | \quad p/q$-Formel
$y_{1,2} = 10{,}5 \pm \sqrt{30{,}25} = 10{,}5 \pm 5{,}5$
$y_1 = 16; \;\; y_2 = 5$
Es befanden sich 16 schwarze und 5 weiße Perlen in der Schale, da nach Aufgabentext zu Beginn mehr schwarz als weiße Perlen in der Schale waren.

Lösung C2

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Verbale Beschreibung eines mathematisch formulierten Bernoulli-Experiments.
c) Aufgabe zum fairen Erwartungswert eines Glücksspiels.
d) Berechnen verschiedener Wahrscheinlichkeiten für ein verbal vorgegebenes Glücksspiel.

Klausuraufschrieb

a) A: Genau drei dieser Kugeln sind rot.
$B_{8;0,3}(X = 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2541$
B: Mehr als zwei und weniger als sechs dieser Kugeln sind rot.
$B_{8;0,3}(2 < X < 6) = B_{8;0,03}(X \leq 5) - B_{8;0,03}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}4369$
C: Die ersten drei Kugeln haben dieselbe Farbe.
Die möglichen Ereignisse der ersten drei Ziehungen sind $P(rrr) + P(sss) + P(www)$. Da über die restlichen fünf Ziehungen keine Aussage gemacht ist, ist deren Einzelwahrscheinlichkeit jeweils 1 und es gilt:
$P(C) = 0{,}3^3 \cdot 1^5 + 0{,}6^3 \cdot 1^5 + 0{,}1^3 \cdot 1^5 = 0{,}027 + 0{,}216 + 0{,}001$
$P(C) = 0{,}244$

b) *Verbale Beschreibung eines mathematisch formulierten Experiments:*
Der angegebene Term ist die Bernoulli-Formel. Das Experiment lautet:
Es werden nacheinander fünf Kugeln mit Zurücklegen gezogen, man zieht genau drei schwarze Kugeln.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2020 BW

c) *Ermittlung des fairen Erwartungswertes eines Glücksspiels.*

Zunächst Bestimmung der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten:

$P(1\ weiße\ Kugel) = P(w\overline{w}, \overline{w}w) = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} = \frac{2}{10}$

$P(2\ Kugeln\ gleiche\ Farbe) = P(ss; rr) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

$P(alle\ anderen) = 1 - P(w\overline{w}, \overline{w}w) - P(ss; rr) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$

Der Einsatz sei a.

X_i	$4{,}00\ € - a\ €$	$a - a\ €$	$-a\ €$	
p_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	
$X_i \cdot p_i$	$1{,}60\ € - 0{,}4a\ €$	$0 \cdot a\ €$	$-0{,}4\ €$	
$\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i$	$1{,}60\ € - 0{,}4a\ € + 0\ € - 0{,}4a\ €$			

Das Spiel soll fair sein, also $E(x) = 0$

$1{,}60\ € - 0{,}4a\ € + 0\ € - 0{,}4a\ € = 0\ €$

$1{,}60\ € = 0{,}8a\ €$

$a = 2\ €$

Der Einsatz muss $2\ €$ betragen, damit das Spiel fair ist.

d) *Berechnung einer Gewinnwahrscheinlichkeit:*

Gewinnwahrscheinlichkeit für mindestens eine rote Kugeln aus 200 schwarzen und 5 roten Kugeln bei 15-mal Ziehen mit Zurücklegen:

$B_{15;0{,}025}(X \geq 1) = 1 - B_{15;0{,}025}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}316$

Aufstellung eines Terms:

$B_{15-z;\frac{5+2z}{205+2z}}(X \geq 1) = 1 - B_{15-z;\frac{5+2z}{205+2z}}(X = 0) = 1 - \binom{15-z}{0} \cdot \left(\frac{5+2z}{205+2z}\right)^0 \cdot \left(\frac{200}{205+2z}\right)^{15-z}$

$B_{15-z;\frac{5+2z}{205+2z}}(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{200}{205+2z}\right)^{15-z}$

Bestimmung des Gewinnmaximums:

z	$1 - \left(\frac{200}{205+2z}\right)^{15-z}$
3	0,4740
4	0,4998
5	0,5148
6	0,5201
7	0,5162

Der Spieler muss auf sechs Züge verzichten, um seine Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren.