Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 01

Aufgabe C1

Der Body-Mass-Index ist eine Maßzahl für die Bewertung des Körpergewichts eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße. Menschen mit einem BMI > 25 gelten laut diesem Index bereits als übergewichtig.
Laut statistischem Bundesamt waren im Jahr 2018 $60\,\%$ der männlichen Bevölkerung und $55\,\%$ der weiblichen Bevölkerung übergewichtig (BMI > 25).

a) Berechnen Sie, die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind genau 6 Männer übergewichtig."
B: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind mehr als die Hälfte übergewichtig."
C: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind nur die ersten drei nicht übergewichtig."

b) Bestimmen Sie, wie groß eine Gruppe weiblicher Personen mindestens sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über $99\,\%$ mindestens eine Frau in der Gruppe übergewichtig ist.

c) In der Gesamtbevölkerung Deutschlands betrug der Anteil der Übergewichtigen im Jahr 2018 laut statistischem Bundesamt $57\,\%$.
Ein Dorf hat 500 Einwohner.
Die Anzahl der Übergewichtigen im Dorf liegt mit etwa $95\,\%$ in dem Intervall $[\mu - 1{,}96\,\sigma,\ \mu + 1{,}96\,\sigma]$.
Bestimmen Sie Grenzen dieses Intervalls.
Ein Sportverein in dem Dorf hat 409 Mitglieder. Der Vereinsvorsitzende behauptet, dass der Anteil der Übergewichtigen in seinem Verein geringer als in der sonstigen Bevölkerung ist.
Um dies zu überprüfen, wird die Nullhypothese H_0: $p \geq 57\,\%$ auf dem Signifikanzniveau $10\,\%$ getestet und das BMI der 40 Mitglieder ermittelt.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung C1

Lösungslogik

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*
Alle drei Ereignisse sind Binomialverteilungen. Aufstellung der jeweiligen Bernoulli-Formel und Berechnung mittels WTR.

b) *Anzahl weiblicher Personen:*
Gesucht wird der Stichprobenumfang n weiblicher Personen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine übergewichtige Person zu finden größer ist als $0{,}99$.
Die zugehörige Bernoulliformel lautet : $B_{n;0,55}(X \geq 1) > 0{,}99$.

c) *Intervallgrenzen für übergewichtige Dorfeinwohner:*
Berechnung der Kennzahlen μ und σ und des $1{,}96\sigma$-Intervalls.
Signifikanztest:
Mit H_0: $p_0 \geq 0{,}57$; und der Gegenhypothese H_1: $p_1 < 0{,}57$ handelt es sich um einen linksseitigen Test mit $\alpha = 0{,}1$.

Klausuraufschrieb

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*

$P(A) = B_{10;0,6}(X = 6) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}251$

$P(B) = B_{10;0,6}(X \geq 6) = 1 - B_{10;0,6}(X \leq 5) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}633$

$P(C) = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0018$

b) *Anzahl weiblicher Personen:*

$B_{n;0,55}(X \geq 1) > 0{,}99$
$1 - B_{n;0,55}(X = 0) > 0{,}99 \quad | \quad +B_{n;0,55}(X = 0);\ -0{,}99$
$0{,}01 > B_{n;0,55}(X = 0)$
$\binom{n}{0} \cdot 0{,}55^0 \cdot 0{,}45^n < 0{,}01$
$1 \cdot 1 \cdot 0{,}45^n < 0{,}01 \quad | \quad ln$
$n \cdot ln(0{,}45) < ln(0{,}01) \quad | \quad : ln(0{,}45)$
$n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}45)} \overset{\text{WTR}}{\approx} 5{,}8$
Die Gruppe muss aus mindestens 6 weiblichen Personen bestehen.

c) *Intervallgrenzen für übergewichtige Dorfeinwohner:*

$n = 500;\ p = 0{,}57;\ \mu = n \cdot p = 285;\ \ \sigma = \sqrt{\mu \cdot (1 - p)} = \sqrt{285 \cdot 0{,}43} \overset{\text{WTR}}{\approx} 11{,}07$
$[\mu - 1{,}96\,\sigma,\ \mu + 1{,}96\,\sigma] = [285 - 11{,}07; 285 + 11{,}07] = [263{,}3; 306{,}7]$
Die Anzahl übergewichtiger Dorfeinwohner ist $[263; 307]$.

Signifikanztest:
H_0: $p_0 \geq 0{,}57$; $p_1 < 0{,}57$ => linksseitiger Test $\alpha = 0{,}1$; $n = 40$
$B_{40;0,57}(X \leq k) \leq 0{,}1$
$B_{40;0,57}(X \leq 18) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0855;\quad B_{40;0,57}(X \leq 19) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}146$
$\overline{A} = [0; 18];\ A = [19; 40]$
Entscheidungsregel:
Haben höchstens 18 *Personen im Verein einen BMI von* > 25 *, so wird die Nullhypothese verworfen, ansonsten wird sie beibehalten.*