Aufgabe M02C1

Ein Glücksrad besteht aus drei farbigen Sektoren mit den Mittelpunktswinkeln $180°$ (rot), $90°$ (gelb) und $90°$ (blau).

a) Das Glücksrad wird zehn Mal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   A: „Die Farbe Blau tritt genau vier Mal auf."
   B: „Die Farbe Blau tritt mindestens vier Mal auf."

b) Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über $99\,\%$ mindestens einmal die Farbe Blau zu bekommen?

Eine Klasse setzt dieses Glücksrad beim Schulfest ein, wobei folgende Spielregeln gelten:
Für einen Einsatz von einem Euro darf ein Spieler das Glücksrad drei Mal drehen. Wenn drei Mal dieselbe Farbe erscheint, erhält er zwei Euro zurück; wenn drei verschiedene Farben erscheinen, bekommt er nichts ausbezahlt; in allen anderen Fällen erhält er seinen Einsatz zurück.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht ein Spieler Verlust, wenn er dieses Spiel einmal spielt?

d) Die Klasse will im nächsten Jahr zwar die Spielregeln beibehalten, aber durch Veränderung der Sektorengrößen ihre Gewinnwahrscheinlichkeit erhöhen. Dabei soll der rote Sektor weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Drehung „gelb" erscheint. Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler Verlust macht, am größten?

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 02

Lösung M02C1

Lösungslogik

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*
Alle zwei Ereignisse sind Binomialverteilungen. Aufstellung der jeweiligen Bernoulli-Formel und Berechnung mittels WTR.

b) *Anzahl durchzuführender Spiele:*
Gesucht wird der Stichprobenumfang n Glücksraddrehungen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal die Farbe Blau zu erhalten größer ist als $0{,}99$.
Die zugehörige Bernoulliformel lautet : $B_{n;0,25}(X \geq 1) > 0{,}99$.

c) *Wahrscheinlichkeit für Verlust bei einmaligem Spiel:*
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für drei verschiedene Farben.

d) *Wahrscheinlichkeit p für gelb damit größter Verlust entsteht:*
Wir ordnen die Wahrscheinlichkeiten neu gemäß Aufgabenstellung und berechnen erneut die Wahrscheinlichkeit für drei verschiedene Farben.

Klausuraufschrieb

a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*

$P(A) = B_{10;0,25}(X = 4) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}146$

$P(B) = B_{10;0,25}(X \geq 4) = 1 - B_{10;0,25}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2241$

b) *Anzahl durchzuführender Spiele:*

$B_{n;0,25}(X \geq 1) > 0{,}99$

$1 - B_{n;0,25}(X = 0) > 0{,}99 \qquad | \qquad +B_{n;0,25}(X = 0);\ -0{,}99$

$0{,}01 > B_{n;0,25}(X = 0)$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^n < 0{,}01$

$1 \cdot 1 \cdot 0{,}75^n < 0{,}01 \qquad | \qquad ln$

$n \cdot ln(0{,}75) < ln(0{,}01) \qquad | \qquad : ln(0{,}45)$

$n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}75)} \overset{\text{WTR}}{\approx} 16$

Man muss 16 Mal spielen.

c) *Wahrscheinlichkeit für Verlust bei einmaligem Spiel:*

C: „Es treten drei verschiedene Farben auf."

$P(C) = 3! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} \approx 0{,}188$

Die Wahrscheinlichkeit für Verlust bei einmaligem Spiel beträgt $\frac{3}{16}$.

d) $P(gelb) = p; \quad P(rot) = 2P; \quad p(blau) = 1 - p - 2p = 1 - 3p$

$P(C) = 3! \cdot p \cdot 2p \cdot (1 - 3p) = 12p^2(1 - 3p) = 12p^2 - 36p^3$

$P'(C) = 24p - 108p^2$

$24p - 108p^2 = 0$

$12p(2 - 9p) = 0$

$p_1 = 0; \quad p_s = \frac{2}{9}$

$P''(C) = 24 - 216p$

$P''(0) > 0 \quad ==>$ Tiefpunkt, Minimum

$P''\left(\frac{2}{9}\right) < 0 \quad ==>$ Hochpunkt, Maximum

Für $P(gelb) = \frac{2}{9}$ ist die Wahrscheinlichkeit für Verlust am größten.