Aufgabe M03C1

Bei einem Schulfest gibt es verschiedene Attraktionen.

a) Auf einem Tisch liegen verdeckt fünf Spielkarten, unter denen sich zwei Joker befinden. Hilde und Franz decken abwechselnd je eine Karte auf. Es gewinnt, wer zuerst einen Joker zieht. Hilde beginnt das Spiel.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Franz gewinnt.
B: Hilde gewinnt.

b) Bei einem Glücksrad der Klasse 5a gewinnt man ein Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}25$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 50 Spielen mindestens zehn Mal gewinnt?

Beim Glücksrad der Klasse 5b beträgt die Wahrscheinlichkeit, bei 50 Spielen mindestens zehn Mal zu gewinnen, $99\,\%$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in einem Spiel auf zwei Dezimalen genau.

c) Bei einem Spielautomaten erscheint auf Knopfdruck ein Bildsymbol: entweder eine Sonne oder ein Mond. Für einen Einsatz von einem Euro darf man zwei Mal nacheinander drücken. Erscheint zwei Mal die Sonne, so erhält man zwei Euro ausbezahlt; erscheint zwei Mal der Mond, so erhält man einen Euro ausbezahlt, in den anderen Fällen erhält man nichts ausbezahlt.
Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für Sonne sein, damit das Spiel fair ist?

Lösung M03C1

Lösungslogik

a) *Wahrscheinlichkeiten für Gewinn von Hilde bzw. Franz:*
Unter Verzicht auf ein Baumdiagramm stellen wir die einzelnen Ergebnisse für Hilde zusammen und berechnen deren Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von Franz ergibt sich dann über das Gegenereignis.

b) *Glücksräder Klasse 5a und Klasse 5b:*
Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung, Aufstellung der Bernoulliformel und Berechnung. Im Falle von Klasse 5b über eine Interpolation der Gewinnwahrscheinlichkeit.

c) *Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit für faires Spiel:*
Wir berechnen den Erwartungswert mit einer Wahrscheinlichkeit p_{Sonne} und setzen dann $E(X)$ auf Null.

Klausuraufschrieb

a) *Wahrscheinlichkeiten für Gewinn von Hilde bzw. Franz:*
Es sei J_H gleich „Hilde zieht einen Joker, $\overline{J_H}$ gleich „Hilde zieht keinen Joker.
Es sei J_F gleich „Franz zieht einen Joker, $\overline{J_F}$ gleich „Franz zieht keinen Joker.
Ergebnisraum für Hilde, die beginnt:
$\Omega_{\mathrm{H}} = \{J_H; \overline{J_H J_F} J_H\}$
$P(B) = P(J_H) + P\left(\overline{J_H J_F} J_H\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{12}{60} = \frac{24+12}{60} = \frac{36}{60} = 0{,}6$
Ergebnisraum für Franz, der als Zweiter zieht:
$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}6) = 0{,}4$

b) *Glücksräder Klasse 5a und Klasse 5b:*

Klasse 5a: $B_{50;0,25}(X \geq 10) = 1 - B_{50;0,25}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}8363$
Die Wahrscheinlichkeit für Klasse 5a beträgt etwa $0{,}84$.
Klasse 5b: $B_{50;p}(X \geq 10) = 1 - B_{50;p}(X \leq 9) = 0{,}99$

$$1 - \sum_{i=1}^{9} \binom{50}{i} p^i \cdot (1-p)^{50-i} = 0{,}99$$

$$\sum_{i=1}^{9} \binom{50}{i} p^i \cdot (1-p)^{50-i} = 0{,}01$$

Diese Formel ist mit dem WTR nicht mehr abbildbar und wir fangen an zu interpolieren, wir beginnen mit $p = 0{,}3$:

$B_{50;0,3}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}04$

$B_{50;0,4}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0007$

$B_{50;0,35}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0067$

$B_{50;0,34}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}009$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn in einem Spiel muss etwa $34\,\%$ *betragen.*

c) *Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit für faires Spiel:*
$P(Sonne) = p; \quad P(Mond) = 1 - p$
Nachweis faires Spiel:
Wahrscheinlichkeiten der Gewinnsituationen:
Sonne-Sonne: $p \cdot p = p^2$
Mond-Mond: $(1-p)^2 = 1 - 2p + p^2$
Verlust: $1 - P(Sonne, Sonne) - P(Mond, Mond)$
$1 - p^2 - (1 - 2p + p^2) = -2p^2 + 2p$

X_i	$1{,}00$ €	0 €	$-1{,}00$ €	
p_i	p^2	$(1-p)^2$	$2p - 2p^2$	
$X_i \cdot p_i$	p^2	0	$2p^2 - 2p$	
$\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i$	$p^2 + 2p^2 - 2p$			

Das Spiel soll fair, sein, also $E(X) = 0$.
$3p^2 - 2p = 0$
$p(3p - 2) = 0$
$p_1 = 0; \quad p_2 = \frac{2}{3}$
$p_1 = 0$ macht keinen Sinn.
Die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen von Sonne muss $\frac{2}{3}$ betragen, damit das Spiel fair ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de