

### Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 04



#### Aufgabe M04C1

Ein Hotel hat 150 Zimmer. Für sein beliebtes Wochenendangebot liegen immer deutlich mehr als 150 Anfragen für Reservierungen vor. Da die Hotelleitung im vergangenen Jahr die Erfahrung gemacht hat, dass im Mittel nur 90 % der Reservierungen in Anspruch genommen werden, entschließt sie sich nun, immer 160 Reservierungen anzunehmen. Die Anzahl der Reservierungen, die tatsächlich in Anspruch genommen werden, wird durch eine Zufallsvariable  $X$  beschrieben. Diese wird als binomialverteilt angenommen.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:  
 $E1$ : Genau 150 Reservierungen werden in Anspruch genommen.  
 $E2$ : Es müssen Gäste, die reserviert haben, abgewiesen werden.  
 $E3$ : Alle Gäste, die ihre Reservierung in Anspruch nehmen wollen, bekommen ihr Zimmer.
- Falls Gäste, die reserviert haben, wegen Überbuchung kein Zimmer bekommen, müssen sie auf Kosten des Hotels in einem teureren Hotel in der Nähe untergebracht werden. Die Hotelleitung will daher erreichen, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall unter 1 % liegt.  
Wie viele Reservierungen darf sie dann höchstens annehmen?

Die Hotelleitung überlegt, ob sie das Hotel mit einer Sauna ausstatten soll. Das Vorhaben soll aber nur dann umgesetzt werden, wenn mindestens 20 % der Gäste dieses kostenpflichtige Angebot auch nutzen würden.

Die Nullhypothese  $H_0$ : „Höchstens 20 % der Gäste würden die Sauna nutzen.“ soll auf der Basis einer Umfrage bei 300 Gästen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

- Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
- Vor der Konzeption des Tests stellte die Hotelleitung folgende Überlegungen an:
  - Wenn die Sauna nicht gebaut wird, obwohl sie mindestens 20 % der Gäste nutzen würden, entgehen dem Hotel zusätzliche Einnahmen.
  - Wenn die Sauna gebaut wird, obwohl sie höchstens 20 % der Gäste nutzen, entstehen dem Hotel finanzielle Verluste.Für einen dieser beiden Fälle kann die Wahrscheinlichkeit des Eintretens mit obigem Test auf 5 % begrenzt werden.  
Entscheiden Sie, welcher der beiden Fälle dies ist.  
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

### Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 04

#### Lösung M04C1

##### Lösungslogik

- a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*  
Alle drei Ereignisse sind Binomialverteilungen. Aufstellung der jeweiligen Bernoulli-Formel und Berechnung mittels WTR.  
Das Ereignis  $E3$  ist das Gegenereignis von  $E2$ .
- b) *Wahrscheinlichkeit für Überbuchung unter 1 %:*  
Gesucht wird die größte Reservierungszahl  $n > 150$ , damit die Wahrscheinlichkeit, bei Inanspruchnahme überbuchter Reservierungen kleiner als 1 % ist.  
Die zugehörige Bernoulliformel lautet :  $B_{n;0,9}(X \geq 151) < 0,01$ .
- c) *Entscheidungsregel eines Signifikanztests:*  
Gesucht ist die Anzahl  $k$  von befragten Personen, die das Saunaangebot nutzen würden.
- d) *Fallentscheidung und Begründung:*  
Siehe Klausuraufschrieb

##### Klausuraufschrieb

- a) *Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:*

$$P(E1) = B_{160;0,9}(X = 150) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,0311$$

$$P(E2) = B_{160;0,9}(X \geq 151) = 1 - B_{160;0,9}(X \leq 150) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,0359$$

$$P(E3) = 1 - P(E2) = 0,9641$$

- b) *Wahrscheinlichkeit für Überbuchung unter 1 %:*

$$B_{n;0,9}(X \geq 151) < 0,01$$

$$1 - B_{n;0,9}(X \leq 150) < 0,01 \quad | \quad +B_{n;0,9}(X \leq 150); -0,01$$

$$B_{n;0,9}(X \leq 150) > 0,99$$

Da der WTR keine Möglichkeit einer Direktlösung bietet, wird ein iteratives Verfahren angewendet. Wir starten mit  $n = 156$

$$B_{156;0,9}(X \leq 150) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,9987$$

$$B_{157;0,9}(X \leq 150) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,9965$$

$$B_{158;0,9}(X \leq 150) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,9915$$

$$B_{159;0,9}(X \leq 150) \stackrel{\text{WTR}}{\approx} 0,9816$$

*Es dürfen maximal 158 Reservierungen angenommen werden.*

- c) *Entscheidungsregel eines Signifikanztests:*

$$H_0: p_0 \leq 0,2 \quad H_1: p_1 > 0,2 \quad \alpha = 0,05$$

$$B_{300;0,2}(X \geq k) < 0,05$$

$$1 - B_{300;0,2}(X \leq k - 1) < 0,05 \quad | \quad +B_{300;0,2}(X \leq k - 1); -0,05$$

$$B_{300;0,2}(X \leq k - 1) > 0,95$$

#### Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 04

Da der WTR keine Möglichkeit einer Direktlösung bietet, wird ein iteratives Verfahren angewendet.

Wir ermitteln zunächst den Startwert für  $k$  über die  $\sigma$ -Regeln.

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{300 \cdot 0,2 \cdot 0,8} \approx 6,9 \quad \mu = n \cdot p = 60$$

Ein rechtsseitiges Signifikanzniveau von 0,05 liegt etwa im  $1,5\sigma$ -Bereich.

$$k - 1 = \mu + 1,5\sigma = 60 + 1,5 \cdot 6,9 = 70,35$$

Wir starten mit  $k - 1 = 70$ .

$$B_{300;0,2}(X \leq 70) > 0,933$$

$$B_{300;0,2}(X \leq 71) > 0,949$$

$$B_{300;0,2}(X \leq 72) > 0,962$$

$$k - 1 = 72$$

$$k = 73$$

$$A = [0; 72]; \quad \bar{A} = [73; 300]$$

Entscheidungsregel:

Wenn mindestens 73 der Befragten das Saunaangebot nutzen wollen, wird die  $H_0$ -Hypothese abgelehnt (die Sauna wird gebaut), ansonsten bleibt sie erhalten (die Sauna wird nicht gebaut).

d) *Fallentscheidung und Begründung:*

Für die Überlegung II kann die Wahrscheinlichkeit des Eintretens auf 5 % begrenzt werden.

Im Test wurde die Nullhypothese, dass höchstens 20 % der Befragten die Sauna benutzen, mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % abgelehnt.