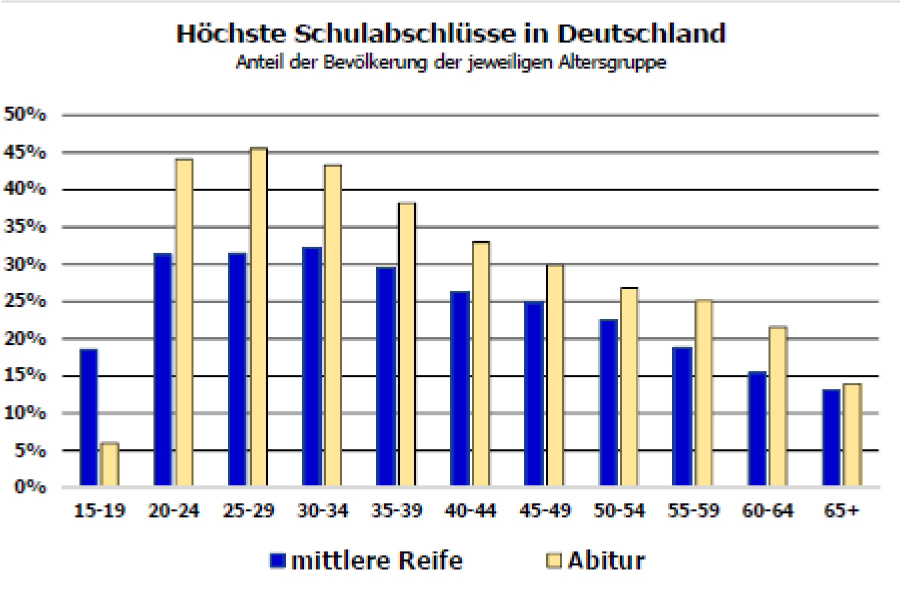
Aufgabe M05C1

Das folgende Diagramm zeigt Daten des statistischen Bundesamts zum jeweils höchsten erreichten Schulabschluss in verschiedenen Altersgruppen (Stand 2012):



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte $20-24$-jährige Person kein Abitur hat.
Eine andere Statistik gibt an, dass 2012 die Anzahl der Personen mit mittlerer Reife im Alter von 45 bis 49 Jahren größer war als die entsprechende Anzahl bei den 35-39-jährigen Personen.
Untersuchen Sie, ob diese Aussage mit den obigen Daten vereinbar ist.

b) Zwanzig Personen im Alter von 55 bis 59 Jahren werden zufällig ausgewählt. Begründen Sie, dass die Anzahl der Personen mit Abitur in dieser Gruppe mit einer binomialverteilten Zufallsvariablen beschrieben werden kann.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: In dieser Gruppe haben genau sechs Personen Abitur.
B: In dieser Gruppe haben höchstens vier Personen Abitur.

c) Zwölf Personen nehmen an einem Abitur-Fernkurs teil. Zehn von ihnen haben bereits die mittlere Reife. Bei jedem von ihnen liegt die Erfolgschance bei $80\,\%$. Bei den beiden anderen beträgt die Erfolgschance jeweils nur $60\,\%$.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
C: Alle zehn Personen mit mittlerer Reife sind erfolgreich.
D: Mindestens elf Personen schließen den Fernkurs erfolgreich ab.

Lösung M05C1

Klausuraufschrieb

a) *Wahrscheinlichkeit 20-24-jährige Person kein Abitur:*

$P_{20-24}(Abitur) = 0{,}44$ | Abgelesen aus Graphik

$P_{20-24}(\overline{Abitur}) = 0{,}56$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 20-24-jährige Person kein Abitur hat, beträgt $56\,\%$

Anzahl der Personen mit mittlerer Reife im Alter von 45 *bis* 49 *Jahren größer als die entsprechende Anzahl bei den* 35-39*-jährigen Personen:*

Laut Diagramm haben die 35-39-jährigen Personen mit mittlere Reife einen höherer **Anteil** als die 45-49-jährigen. Die andere Statistik spricht von **Personen**. Da über die Personenanzahl der einzelnen Gruppen keine Angabe vorliegt, ist die Aussage mit der vorgelegten Graphik durchaus vereinbar (z.B. sind $25\,\%$ von 2000 Personen 500 Personen, $30\,\%$ von 1000 Personen aber nur 300 Personen).

b) *Begründung einer Binomialverteilung:*

Die zufällige Auswahl von Personen aus der Gruppe der 55-59-jährigen ist ein Bernoulli-Experiment mit den beiden Ergebnissen **Abitur** und **kein Abitur**. Die 20-fache Wiederholung dieses Experiments ist eine Bernoulli-Kette.

Verschiedene Wahrscheinlichkeiten:

$P(A) = B_{20;0,25}(X = 6) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}1686$

$P(B) = B_{20;0,25}(X \leq 4) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}4148$

c) *Mehrstufiger Zufallsversuch:*

10 aus 12 Personen mit mittlerer Reife: $p_1 = \frac{10}{12}$ mit $p_{1E} = 0{,}8$

2 aus 12 Personen ohne mittlerer Reife: $p_2 = \frac{2}{12}$ mit $p_{2E} = 0{,}6$

$\mathrm{P}(C) = B_{10;0,8}(X = 10) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}1074$

Beim Ereignis bestehen entweder alle 10 Personen mit mittlerer Reife **und** beide Personen ohne mittlerer Reife **oder** alle 10 Personen mit mittlerer Reife **und** eine Person ohne mittlere Reife **oder** 9 Personen mit mittlerer Reife **und** beide Personen ohne mittlere Reife.

$$\mathrm{P}(D) = B_{10;0,8}(X = 10) \cdot B_{2;0,6}(X = 2) + B_{10;0,8}(X = 10) \cdot B_{2;0,6}(X = 1) + B_{10;0,8}(X = 9) \cdot B_{2;0,6}(X = 2)$$

$$\mathrm{P}(D) = 0{,}1074 \cdot 0{,}36 + 0{,}1074 \cdot 0{,}48 + 0{,}2684 \cdot 0{,}36 = 0{,}1868$$

Hinweis: Dies ist ein sehr schönes Beispiel für die allgemeine Regel in der Wahrscheinlichkeitsrechnung:
Muss man Ereignisse mit **und** verbinden, werden die Wahrscheinlichkeiten **multipliziert**.
Muss man Ereignisse mit **oder** verbinden, werden die Wahrscheinlichkeiten **addiert**.