Aufgabe M06C1

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile der in Deutschland fahrenden Autos.

Farbe	silber oder grau	schwarz	weiß
Anteil	$29{,}9\,\%$	$28{,}8\,\%$	$15{,}1\,\%$

Diese Anteile werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der jeweiligen Autofarben verwendet.
Zwei Kinder beobachten vorbeifahrende Autos und achten auf deren Farbe.

a) Zunächst beobachten die Kinder 80 Autos.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Genau 22 Autos sind silber oder grau.
B: Mindestens 33 Autos sind schwarz.
C: Unter den ersten zehn Autos sind mindestens drei, die keine in der Tabelle angegebenen Farben haben und von den anderen 70 Autos sind höchstens 20 schwarz.

b) Wie hoch müsste der Anteil der schwarzen Autos mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ unter 100 beobachteten Autos mindestens 28 schwarz sind.

c) Das eine Kind bietet dem anderen folgendes Spiel an:
„Wenn von den nächsten vier Autos mindestens drei hintereinander nicht schwarz sind, bekommst du von mir ein Gummibärchen, ansonsten bekomme ich eines von dir.“
Untersuchen Sie, ob dieses Spiel fair ist.

d) Es wird vermutet, dass der Anteil p der weißen Autos zugenommen hat. Um dies zu überprüfen, wird die Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}151$ auf dem Signifikanzniveau $10\,\%$ getestet. Dazu werden die Farben von 500 Autos erfasst.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung M06C1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Bernoulliexperiment, bei dem p für die Anzahl schwarzer Autos gesucht ist.
c) Überprüfung des Erwartungswertes auf Wert 0.
d) Hypothesentest, Formulierung der Entscheidungsregel siehe Klausuraufschrieb (keine Berechnung gefordert).

Klausuraufschrieb

a) A: Genau 22 Autos sind silber oder grau.

$B_{80;0,299}(X=22) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}089$

B: Mindestens 33 Autos sind schwarz.

$B_{80;0,288}(X \geq 33) = 1 - B_{80;0,288}(X \leq 32) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0115$

C: Unter den ersten zehn Autos sind mindestens drei, die keine in der Tabelle angegebenen Farben haben und von den anderen 70 Autos sind höchstens 20 schwarz.

Wahrscheinlichkeit für keine in der Tabelle angegebenen Farben:

$100\,\% - 29{,}9\,\% - 28{,}8\,\% - 15{,}1\,\% = 26{,}2\,\%$

$B_{10;0,262}(X \geq 3) \cdot B_{70;0,288}(X \leq 20) = (1 - B_{100,262}(X \leq 2) \cdot B_{70;0,288}(X \leq 20) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}277$

b) $B_{100;p}(X \geq 28) > 0{,}95$

$1 - B_{100;p}(X \leq 27) > 0{,}95$

$B_{100;p}(X \leq 27) < 0{,}05$

Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.

Die Wahrscheinlichkeit $< 0{,}05$ liegt etwa links vor dem $1{,}5\sigma$-Bereich.

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot p; \quad \sigma = \sqrt{100 \cdot p(1-p)}$

$100 \cdot p - 1{,}5 \cdot \sqrt{100 \cdot p(1-p)} = 27$

$1{,}5 \cdot \sqrt{100 \cdot p(1-p)} = 27 - 100 \cdot p$

$2{,}25 \cdot (100p - 100p^2) = 729 - 5400p + 10000p^2$

$10000p^2 + 225p^2 - 225p - 5400p + 729 = 0$

$10225p^2 - 5625p + 729 = 0$

$p^2 - \frac{5625}{10225}p + \frac{729}{10225} = 0$

$p_{1,2} = 0{,}275 \pm \sqrt{0{,}076 - 0{,}071} = 0{,}275 \pm 0{,}071$

$p_1 = 0{,}346; \quad p_2 = 0{,}204$

Wir berechnen

$B_{100;0,204}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}957$

$B_{100;0,346}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}065$

Aus dem Ergebnis lesen wir ab, dass $p > 0{,}346$ sein muss und iterieren weiter:

$B_{100;0,35}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}055$

$B_{100;0,36}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}036$

p liegt also etwas über $0{,}35$.

$B_{100;0,351}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0535$

$B_{100;0,352}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0513$

$B_{100;0,353}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}049 \approx 0{,}05$

Der Anteil schwarzer Autos muss mindestens $35{,}3\ \%$ *betragen.*

c) *Erwartungswert:*
$P(Gewinn)$: Mindestens drei von vier Autos hintereinander nicht schwarz:
$P(\overline{ssss}) + P(s\overline{sss}) + P(\overline{ssss})$ mit $p(s) = 0{,}288$ und $p(\overline{s}) = 0{,}712$.
$P(Gewinn) = 2 \cdot 0{,}288 \cdot 0{,}712^3 + 0{,}712^4 = 0{,}4649$
Somit ist $P(Gewinn) = 0{,}4649$ und $P(Verlust) = 1 - 0{,}4649 = 0{,}5351$.
$P(Gewinn) - P(Verlust) = 0{,}4649 - 0{,}5351 = -0{,}0702$
$\mathrm{E(x)} \neq 0$ das Spiel ist nicht fair.

d) Hypothesentest mit H_0: $p_0 \leq 0{,}151$ und H_1: $p_1 > p_0$
Es ist ein rechtsseitiger Test auszuführen auf dem Signifikanzniveau $10\ \%$.
Die H_0-Hypothese wird abgelehnt, wenn zu viele weiße Autos festgestellt werden, dabei ist der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{a; a+1; a+2; \ldots 500\}$ wobei a die kleinste natürliche Zahl ist, für die gilt:
$B_{500;0,151}(X \geq a) < 0{,}1$ bzw. $1 - B_{500;0,151}(X \leq a-1) < 0{,}1$
$B_{500;0,151}(X \leq a-1) > 0{,}9$
Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.
Die Wahrscheinlichkeit $> 0{,}9$ liegt etwa rechts nach dem $1{,}2\sigma$-Bereich.
$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}151 = 75{,}5; \quad \sigma = \sqrt{75{,}5 \cdot (1 - 0{,}151)} = 8$
$a - 1 = \mu + 1{,}2 * \sigma = 75{,}5 + 9{,}6 = 85{,}1$
Wir starten mit $a - 1 = 85$

$B_{500;0,151}(X \leq 85) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}893$

$B_{500;0,151}(X \leq 86) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9134$

$a - 1 = 86$
$a = 87$
$\overline{A} = \{87; 88; 89; \ldots 500\}$

Entscheidungsregel: Sind mindestens 87 *Autos weiß, so wird die* H_0*-Hypothese verworfen, ansonsten wird sie beibehalten.*