Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 06

Lösung M06C1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Bernoulliexperiment, bei dem p für die Anzahl schwarzer Autos gesucht ist.
c) Überprüfung des Erwartungswertes auf Wert 0.
d) Hypothesentest, Formulierung der Entscheidungsregel siehe Klausuraufschrieb (keine Berechnung gefordert).

Klausuraufschrieb

a) A: Genau 22 Autos sind silber oder grau.

$B_{80;0,299}(X = 22) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}089$

B: Mindestens 33 Autos sind schwarz.

$B_{80;0,288}(X \geq 33) = 1 - B_{80;0,288}(X \leq 32) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0115$

C: Unter den ersten zehn Autos sind mindestens drei, die keine in der Tabelle angegebenen Farben haben und von den anderen 70 Autos sind höchstens 20 schwarz.

Wahrscheinlichkeit für keine in der Tabelle angegebenen Farben:
$100\ \% - 29{,}9\ \% - 28{,}8\ \% - 15{,}1\ \% = 26{,}2\ \%$

$B_{10;0,262}(X \geq 3) \cdot B_{70;0,288}(X \leq 20) = (1 - B_{100,262}(X \leq 2) \cdot\ B_{70;0,288}(X \leq 20) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}277$

b) $B_{100;p}(X \geq 28) > 0{,}95$
$1 - B_{100;p}(X \leq 27) > 0{,}95$
$B_{100;p}(X \leq 27) < 0{,}05$
Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.
Die Wahrscheinlichkeit $< 0{,}05$ liegt etwa links vor dem $1{,}5\sigma$-Bereich.
$\mu = n \cdot p = 100 \cdot p; \quad \sigma = \sqrt{100 \cdot p(1-p)}$
$100 \cdot p - 1{,}5 \cdot \sqrt{100 \cdot p(1-p)} = 27$
$1{,}5 \cdot \sqrt{100 \cdot p(1-p)} = 27 - 100 \cdot p$
$2{,}25 \cdot (100p - 100p^2) = 729 - 5400p + 10000p^2$
$10000p^2 + 225p^2 - 225p - 5400p + 729 = 0$
$10225p^2 - 5625p + 729 = 0$
$p^2 - \frac{5625}{10225}p + \frac{729}{10225} = 0$
$p_{1,2} = 0{,}275 \pm \sqrt{0{,}076 - 0{,}071} = 0{,}275 \pm 0{,}071$
$p_1 = 0{,}346; \quad p_2 = 0{,}204$
Wir berechnen
$B_{100;0,204}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}957$
$B_{100;0,346}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}065$
Aus dem Ergebnis lesen wir ab, dass $p > 0{,}346$ sein muss und iterieren weiter:
$B_{100;0,35}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}055$
$B_{100;0,36}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}036$
p liegt also etwas über $0{,}35$.

$B_{100;0,351}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0535$

$B_{100;0,352}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0513$

$B_{100;0,353}(X \leq 27) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}049 \approx 0{,}05$

Der Anteil schwarzer Autos muss mindestens $35{,}3\ \%$ *betragen.*

c) *Erwartungswert:*

$P(Gewinn)$: Mindestens drei von vier Autos hintereinander nicht schwarz:

$P(\overline{ssss}) + P(s\overline{sss}) + P(\overline{sss}s)$ mit $p(s) = 0{,}288$ und $p(\overline{s}) = 0{,}712$.

$P(Gewinn) = 2 \cdot 0{,}288 \cdot 0{,}712^3 + 0{,}712^4 = 0{,}4649$

Somit ist $P(Gewinn) = 0{,}4649$ und $P(Verlust) = 1 - 0{,}4649 = 0{,}5351$.

$P(Gewinn) - P(Verlust) = 0{,}4649 - 0{,}5351 = -0{,}0702$

$\mathrm{E(x)} \neq 0$ das Spiel ist nicht fair.

d) Hypothesentest mit H_0: $p_0 \leq 0{,}151$ und H_1: $p_1 > p_0$

Es ist ein rechtsseitiger Test auszuführen auf dem Signifikanzniveau $10\ \%$.

Die H_0-Hypothese wird abgelehnt, wenn zu viele weiße Autos festgestellt werden, dabei ist der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{a; a+1; a+2; \dots 500\}$ wobei a die kleinste natürliche Zahl ist, für die gilt:

$B_{500;0,151}(X \geq a) < 0{,}1$ bzw. $1 - B_{500;0,151}(X \leq a-1) < 0{,}1$

$B_{500;0,151}(X \leq a-1) > 0{,}9$

Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.

Die Wahrscheinlichkeit $> 0{,}9$ liegt etwa rechts nach dem $1{,}2\sigma$-Bereich.

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}151 = 75{,}5; \quad \sigma = \sqrt{75{,}5 \cdot (1 - 0{,}151)} = 8$

$a - 1 = \mu + 1{,}2 * \sigma = 75{,}5 + 9{,}6 = 85{,}1$

Wir starten mit $a - 1 = 85$

$B_{500;0,151}(X \leq 85) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}893$

$B_{500;0,151}(X \leq 86) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9134$

$a - 1 = 86$

$a = 87$

$\overline{A} = \{87; 88; 89; \dots 500\}$

Entscheidungsregel: Sind mindestens 87 *Autos weiß, so wird die* H_0*-Hypothese verworfen, ansonsten wird sie beibehalten.*