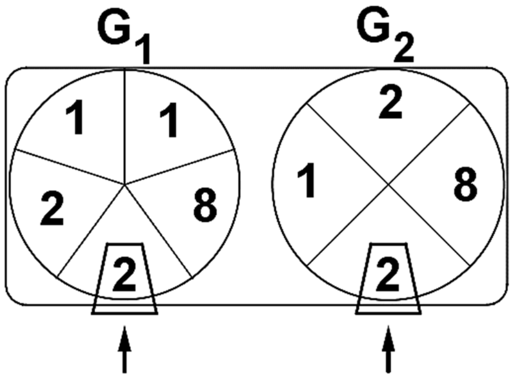
Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 07

Aufgabe M07C1

Bei dem dargestellten Glücksspielautomaten sind zwei Glücksräder G_1 und G_2 mit fünf bzw. vier gleich großen Kreissektoren angebracht. Bei jedem Spiel werden sie in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im Rahmen angezeigt wird. Der Spieleinsatz beträgt $2\,€$. Sind die beiden angezeigten Zahlen gleich, so wird deren Summe in Euro ausbezahlt; andernfalls wird nichts ausgezahlt.
Der Hauptgewinn besteht also daraus, dass $16\,€$ ausbezahlt werden.



a) Ein Spieler spielt zehn Mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   A: Das Glücksrad G_1 zeigt genau fünf Mal die Zahl 1.
   B: Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10.
   C: Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn.

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $95\,\%$ soll in mindestens einem Spiel der Hauptgewinn erzielt werden.
   Berechnen Sie, wie oft man dafür mindestens spielen muss.

c) Berechnen Sie, wie viel der Spielebetreiber auf lange Sicht durchschnittlich pro Spiel verdient.

d) Der Betreiber möchte erreichen, dass bei zehn Spielen die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Hauptgewinn maximal $25\,\%$ beträgt.
   Dazu möchte er bei dem Glücksrad G_2 den Mittelpunktswinkel des Kreissektors verändern, der mit der Zahl 8 beschriftet ist.
   Berechnen Sie, wie weit der Mittelpunktswinkel dieses Kreissektors maximal gewählt werden darf.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 07

Lösung M07C1

Lösungslogik

a) Ereignis A ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{10;0,4}(X=5)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gefallenen 1-en an, Berechnung per WTR.
Der Ereignisraum für Ereignis B ist $\Omega=\{(2;8),(8;2)\}$. Berechnung der Wahrscheinlichkeit gemäß der erste und zweiten Pfadregel.
Ereignis C ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{10;\frac{1}{20}}(X\geq 1)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gedrehten Doppel-Acht an. Berechnung per WTR über das Gegenereignis.

b) Bernoulli-Experiment mit $B_{n;\frac{1}{20}}(X\geq 1)>0{,}95$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gedrehten Doppel-Acht an. Gesucht wird die Mindestanzahl der Drehungen des Glücksrades.

c) Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$.

d) Bernoulli-Experiment mit $B_{10;\frac{1}{5}\cdot p_2}(X\geq 1)\leq 0{,}25$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gedrehten Doppel-Acht an. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für eine 8 bei Glücksrad G_2.

Klausuraufschrieb

a) A: Das Glücksrad G_1 zeigt genau fünf Mal die Zahl 1.

$$P(G_1=1)=\frac{2}{5}\Longrightarrow\ B_{10;0,4}(X=5)\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}201$$

B: Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10.

$$\Omega=\{(2;8),(8;2)\}$$

$$P(\Omega)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}=20\ \%$$

C: Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn.

$$B_{10;\frac{1}{20}}(X\geq 1)=1-B_{10;\frac{1}{20}}(X=0)\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}401$$

b)

$$B_{n;\frac{1}{20}}(X\geq 1)>0{,}95$$
$$1-B_{n;\frac{1}{20}}(X=0)>0{,}95$$
$$B_{n;\frac{1}{20}}(X=0)<0{,}05$$
$$\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^0\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^n<0{,}05$$
$$\left(\frac{19}{20}\right)^n<0{,}05 \qquad |\quad ln$$
$$n\cdot ln\left(\frac{19}{20}\right)<ln(0{,}05) \qquad |\quad :ln\left(\frac{19}{20}\right)$$
$$n>\frac{ln(0{,}05)}{ln\left(\frac{19}{20}\right)}=58{,}4$$

Man muss mindestens 59 *Mal spielen.*

c) *Berechnung des Erwartungswertes:*
Wahrscheinlichkeiten der Gewinnsituationen:

„1"-„1" $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

„2"-„2" $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10}$

„8"-„8" $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

X_i	$0{,}00$ €	$2{,}00$ €	$14{,}00$ €	$-2{,}00$
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{13}{20}$
$X_i \cdot p_i$	$0{,}00$	$0{,}40$	$0{,}70$	$-1{,}30$
$\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i$	$0{,}00 + 0{,}40 + 0{,}70 - 1{,}30 = -0{,}20$			

Wegen $E(X) = \sum_{i=1}^{4} X_i \cdot p_i = -0{,}20$ *verdient der Spielebetreiber auf lange Sicht gesehen* $0{,}20$ € */ Spiel.*

d) $B_{10;\frac{1}{5}\cdot p_2}(X \geq 1) \leq 0{,}25$

$1 - B_{10;\frac{1}{5}\cdot p_2}(X = 0) \leq 0{,}25$

$B_{10;\frac{1}{5}\cdot p_2}(X = 0) \geq 0{,}75$

$\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{p}{5}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{p}{5}\right)^{10} \geq 0{,}75$

$\left(1 - \frac{p}{5}\right)^{10} \geq 0{,}75 \qquad | \sqrt[10]{}$

$1 - \frac{p}{5} \geq \sqrt[10]{0{,}75}$

$\frac{p}{5} \leq 1 - \sqrt[10]{0{,}75}$

$\frac{p}{5} \leq 0{,}0284$

$p \leq 0{,}0284 \cdot 5 = 0{,}1418$

Maximaler Mittelpunktwinkel:

$\varphi_{max} = 360° \cdot p = 360° \cdot 0{,}1418 \approx 51°$

Der Mittelpunktswinkel für die 8 *bei* G_2 *darf höchstens* $51°$ *betragen.*