Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 08

Aufgabe M08C1.1

Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind $4\,\%$ der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

a) 800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft."
B: „Mindestens $5\,\%$ der Teile sind fehlerhaft."

b) Ermitteln Sie, wie viele Kunststoffteile mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit davon mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens 100 Teile keinen Fehler haben.

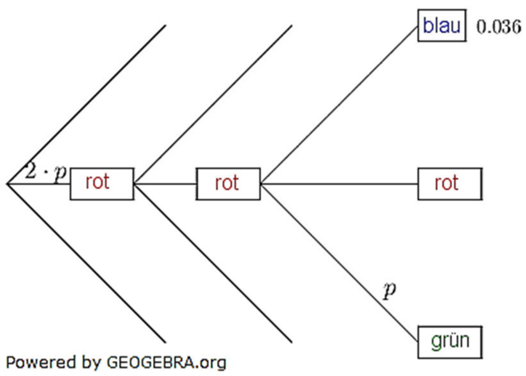
c) Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens $4\,\%$" auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Teilen auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ getestet werden.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Aufgabe M08C1.2

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei Sektoren in den Farben rot, grün und blau hat. Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, beträgt ebenfalls $\frac{1}{6}$.

a) Bei einem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen.
Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

b) Die ursprünglichen Größen der Sektoren werden geändert. Dabei soll der Mittelpunkts-Winkel des blauen Sektors größer als $180\,°$ werden. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die drei Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben.
Bestimmen Sie die Weite des zum blauen Sektor gehörenden Mittelpunkt-Winkels.



Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 08

Lösung M08C1.1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.
b) Bernoulliexperiment, bei dem der Stichprobenumfang gesucht wird.
Die zugehörige Bernoulliformel lautet: $B_{n;0,96}(X \geq 100) > 0{,}95$.
c) Hypothesentest, Formulierung der Entscheidungsregel siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft."

$B_{800;0,04}(X = 30) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}06927$

B: „Mindestens $5\,\%$ der Teile sind fehlerhaft."

$5\,\%$ von 800 sind 40 fehlerhafte Teile.

$B_{800;0,04}(X \geq 40) = 1 - B_{800;0,04}(X \leq 39) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}091$

b) $B_{n;0,96}(X \geq 100) > 0{,}95$

$1 - B_{n;0,96}(X \leq 99) > 0{,}95$

$B_{n;0,96}(X \leq 99) < 0{,}05$

Diese Formel kann mit dem WTR nicht direkt gelöst werden, sodass ein iteratives Verfahren angewandt werden muss.

Eine Wahrscheinlichkeit $< 0{,}05$ liegt links der etwa $1{,}5\sigma$-Intervallgrenze.

$\mu = n \cdot p = 0{,}96n; \quad \sigma = \sqrt{0{,}96n \cdot 0{,}04}$

Mit $\mu - \sigma = 99$ erhalten wir:

$0{,}96n - 1{,}6 \cdot \sqrt{0{,}0384n} = 99$

$1{,}5 \cdot \sqrt{0{,}0384n} = 0{,}96n - 99$

$0{,}0864n = 0{,}9216n^2 - 189{,}9936n + 9801$

$0{,}9216n^2 - 189{,}9936n + 9801 = 0$

$n^2 - 206{,}15625n + 10634{,}7656 = 0$

$n_{1,2} = 103{,}07 \pm \sqrt{10623{,}4249 - 10634{,}7656}$

Wegen der Näherung können wir annehmen, dass die Wurzel Null ist.

Wir starten somit mit $n = 103$

$B_{103;0,96}(X \leq 99) = 0{,}594$ $\qquad$ $B_{104;0,96}(X \leq 99) = 0{,}403$

$B_{105;0,96}(X \leq 99) = 0{,}244$ $\qquad$ $B_{106;0,96}(X \leq 99) = 0{,}133$

$B_{107;0,96}(X \leq 99) = 0{,}066$ $\qquad$ $B_{108;0,96}(X \leq 99) = 0{,}0295$

Es müssen mindestens 108 Teile ausgewählt werden.

c) *Hypothesentest:*

H_o: $p_o \geq 0{,}04; \quad H_1$: $p_1 < 0{,}04$

$n = 500; \quad \alpha = 0{,}05$

Wegen $p_1 < p_0$ ist ein linksseitiger Test erforderlich mit

$B_{500;0,04}(X \leq k) \leq 0{,}05$

Ablehnungsbereich $\overline{A} = [0; 1; 2; \dots; k]$

Annahmebereich $A = [k+1; k+2; k+3; \dots; 500]$

Die Formel kann mit dem WTR nicht mehr direkt gelöst werden, sodass ein iteratives Verfahren angewandt werden muss.

Eine Wahrscheinlichkeit $\leq 0{,}05$ liegt links der etwa $1{,}5\sigma$-Intervallgrenze.

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}04 = 20;\quad \sigma = \sqrt{20 \cdot (1-p)} = \sqrt{20 \cdot 0{,}96} = 4{,}3817$
$\mu - 1{,}5\sigma = 20 - 1{,}5 \cdot 4 = 14$
Wir starten mit $k = 14$:
$B_{500;0,04}(X \leq 14) = 0{,}1002$ $\quad B_{500;0,04}(X \leq 13) = 0{,}0623$
$B_{500;0,04}(X \leq 12) = 0{,}0362$
Sind höchstens 12 Teile fehlerhaft, so wird die Null-Hypothese abgelehnt, ansonsten wird sie beibehalten.

Lösung C1.2

Lösungslogik

a) *Aufgabe zum Erwartungswert.*
Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn bei drei gleichen Farben ist $\frac{1}{6}$, bei drei verschiedenen Farben ebenfalls $\frac{1}{6}$, somit für keinen Gewinn $\frac{4}{6}$. Gesucht ist der Auszahlungsbetrag a bei drei verschiedenen Farben für $E(X) = 0$.

b) *Mittelpunkt-Winkel für blau:*
Aus dem Baumdiagramm lesen wir ab:
$P(rot) = 2p;\quad P(grün) = p$
Da die Summe aller möglichen Ergebnisse immer sein muss, muss gelten:
$P(blau) = 1 - (P(rot) + P(grün) = 1 - (2p + p) = 1 - 3p$
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $rotrotblau$ ist mit $P(rotrotblau) = 0{,}036$ gegeben.
Über diesen Ansatz bestimmen wir $P(blau)$ und hieraus dann den Mittelpunkt-Winkel.

Klausuraufschrieb

a) *Erwartungswert:*
Tabelle der Ergebnisse

X_i	$5{,}00$ €	$a - 5$ €	$-5{,}00$
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
$X_i \cdot p_i$	$\frac{5}{6}$	$\frac{a-5}{6}$	$-\frac{20}{6}$
$\sum_{i=1}^{3} X_i \cdot p_i$		$\frac{5}{6} + \frac{a-5}{6} - \frac{20}{6}$	

Laut Aufgabenstellung soll $E(X) = 0$ sein.
$\frac{5}{6} + \frac{a}{6} - \frac{5}{6} - \frac{20}{6} = 0$
$a - 20 = 0$
$a = 20$
Der Gewinnbetrag für drei unterschiedliche Farben beträgt 20 Euro.

b) *Mittelpunkt-Winkel für blau:*
Aus dem Baumdiagramm lesen wir ab.
$P(rot) = 2p;\ \ P(grün) = p$
Somit gilt für $P(blau) = 1 - \big(P(rot) + P(grün)\big) = 1 - 3p$
$P(rot; rot; blau) = 2p \cdot 2p \cdot (1 - 3p) = 0{,}036$
$4p^2 - 12p^3 - 0{,}036 = 0 \qquad | \ :4$
$p^2 - 3p^3 - 0{,}009 = 0$
$p_1 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}118; \quad p_2 \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}3$
Da $P(blau) > 0{,}5$ sein soll (Mittelpunktwinkel $> 180\,°$) kommt nur $p_1 = 0{,}118$ in Frage, also
$P(blau) = 1 - 3 \cdot 0{,}118 = 0{,}646$
$360\,° \cdot 0{,}646 = 232{,}56\,°$
Der Mittelpunkt-Winkel für blau beträgt $232{,}56\,°$*.*