Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 08

Lösung M08C1.1

Lösungslogik

a) Binomialverteilungen mit Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mittels WTR.

b) Bernoulliexperiment, bei dem der Stichprobenumfang gesucht wird.
Die zugehörige Bernoulliformel lautet: $B_{n;0,96}(X \geq 100) > 0{,}95$.

c) Hypothesentest, Formulierung der Entscheidungsregel siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft.“

$B_{800;0,04}(X = 30) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}06927$

B: „Mindestens $5\,\%$ der Teile sind fehlerhaft.“

$5\,\%$ von 800 sind 40 fehlerhafte Teile.

$B_{800;0,04}(X \geq 40) = 1 - B_{800;0,04}(X \leq 39) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}091$

b) $B_{n;0,96}(X \geq 100) > 0{,}95$

$1 - B_{n;0,96}(X \leq 99) > 0{,}95$

$B_{n;0,96}(X \leq 99) < 0{,}05$

Diese Formel kann mit dem WTR nicht direkt gelöst werden, sodass ein iteratives Verfahren angewandt werden muss.

Eine Wahrscheinlichkeit $< 0{,}05$ liegt links der etwa $1{,}5\sigma$-Intervallgrenze.

$\mu = n \cdot p = 0{,}96n; \quad \sigma = \sqrt{0{,}96n \cdot 0{,}04}$

Mit $\mu - \sigma = 99$ erhalten wir:

$0{,}96n - 1{,}6 \cdot \sqrt{0{,}0384n} = 99$

$1{,}5 \cdot \sqrt{0{,}0384n} = 0{,}96n - 99$

$0{,}0864n = 0{,}9216n^2 - 189{,}9936n + 9801$

$0{,}9216n^2 - 189{,}9936n + 9801 = 0$

$n^2 - 206{,}15625n + 10634{,}7656 = 0$

$n_{1,2} = 103{,}07 \pm \sqrt{10623{,}4249 - 10634{,}7656}$

Wegen der Näherung können wir annehmen, dass die Wurzel Null ist.

Wir starten somit mit $n = 103$

$B_{103;0,96}(X \leq 99) = 0{,}594$	$B_{104;0,96}(X \leq 99) = 0{,}403$
$B_{105;0,96}(X \leq 99) = 0{,}244$	$B_{106;0,96}(X \leq 99) = 0{,}133$
$B_{107;0,96}(X \leq 99) = 0{,}066$	$B_{108;0,96}(X \leq 99) = 0{,}0295$

Es müssen mindestens 108 Teile ausgewählt werden.

c) *Hypothesentest:*

H_o: $p_o \geq 0{,}04$; $\quad H_1$: $p_1 < 0{,}04$

$n = 500; \quad \alpha = 0{,}05$

Wegen $p_1 < p_0$ ist ein linksseitiger Test erforderlich mit

$B_{500;0,04}(X \leq k) \leq 0{,}05$

Ablehnungsbereich $\overline{A} = [0; 1; 2; \ldots; k]$

Annahmebereich $A = [k+1; k+2; k+3; \ldots; 500]$

Die Formel kann mit dem WTR nicht mehr direkt gelöst werden, sodass ein iteratives Verfahren angewandt werden muss.

Eine Wahrscheinlichkeit $\leq 0{,}05$ liegt links der etwa $1{,}5\sigma$-Intervallgrenze.

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}04 = 20$; $\sigma = \sqrt{20 \cdot (1-p)} = \sqrt{20 \cdot 0{,}96} = 4{,}3817$
$\mu - 1{,}5\sigma = 20 - 1{,}5 \cdot 4 = 14$
Wir starten mit $k = 14$:
$B_{500;0,04}(X \leq 14) = 0{,}1002$ $B_{500;0,04}(X \leq 13) = 0{,}0623$
$B_{500;0,04}(X \leq 12) = 0{,}0362$
Sind höchstens 12 Teile fehlerhaft, so wird die Null-Hypothese abgelehnt, ansonsten wird sie beibehalten.

Lösung C1.2

Lösungslogik

a) *Aufgabe zum Erwartungswert.*
Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn bei drei gleichen Farben ist $\frac{1}{6}$, bei drei verschiedenen Farben ebenfalls $\frac{1}{6}$, somit für keinen Gewinn $\frac{4}{6}$. Gesucht ist der Auszahlungsbetrag a bei drei verschiedenen Farben für $E(X) = 0$.

b) *Mittelpunkt-Winkel für blau:*
Aus dem Baumdiagramm lesen wir ab:
$P(rot) = 2p$; $P(grün) = p$
Da die Summe aller möglichen Ergebnisse immer sein muss, muss gelten:
$P(blau) = 1 - (P(rot) + P(grün) = 1 - (2p + p) = 1 - 3p$
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $rotrotblau$ ist mit $P(rotrotblau) = 0{,}036$ gegeben.
Über diesen Ansatz bestimmen wir $P(blau)$ und hieraus dann den Mittelpunkt-Winkel.

Klausuraufschrieb

a) *Erwartungswert:*
Tabelle der Ergebnisse

X_i	$5{,}00$ €	$a - 5$ €	$-5{,}00$
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
$X_i \cdot p_i$	$\frac{5}{6}$	$\frac{a-5}{6}$	$-\frac{20}{6}$
$\sum_{i=1}^{3} X_i \cdot p_i$		$\frac{5}{6} + \frac{a-5}{6} - \frac{20}{6}$	

Laut Aufgabenstellung soll $E(X) = 0$ sein.
$\frac{5}{6} + \frac{a}{6} - \frac{5}{6} - \frac{20}{6} = 0$
$a - 20 = 0$
$a = 20$
Der Gewinnbetrag für drei unterschiedliche Farben beträgt 20 *Euro.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) *Mittelpunkt-Winkel für blau:*
Aus dem Baumdiagramm lesen wir ab.
$P(rot) = 2p;\ \ P(grün) = p$
Somit gilt für $P(blau) = 1 - \left(P(rot) + P(grün)\right) = 1 - 3p$
$P(rot; rot; blau) = 2p \cdot 2p \cdot (1 - 3p) = 0{,}036$
$4p^2 - 12p^3 - 0{,}036 = 0 \qquad | \quad :4$
$p^2 - 3p^3 - 0{,}009 = 0$
$p_1 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}118; \quad p_2 \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}3$
Da $P(blau) > 0{,}5$ sein soll (Mittelpunktwinkel $> 180\,°$) kommt nur $p_1 = 0{,}118$ in Frage, also
$P(blau) = 1 - 3 \cdot 0{,}118 = 0{,}646$
$360\,° \cdot 0{,}646 = 232{,}56\,°$
Der Mittelpunkt-Winkel für blau beträgt $232{,}56\,°$*.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de