Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 09

Aufgabe M09C1

Ein Affe sitzt vor einer Tastatur, deren Tasten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 sowie mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F beschriftet sind (siehe Abbildung). Zunächst wird angenommen, dass der Affe zufällig auf die Tasten tippt. Die Tastatureingaben werden aufgezeichnet.

a) Es werden die ersten fünf Tastaturanschläge des Affen betrachtet.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: „Der Affe tippt nur auf Tasten mit Ziffern."
B: „Der Affe tippt höchstens dreimal eine Ziffer."
C: „Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben $A\ F\ F\ E$ direkt hintereinander."

b) Nun werden Versuchsreihen mit jeweils 20 Tastaturanschlägen durchgeführt.
Wie viele Buchstaben pro Versuchsreihe kann man dabei auf lange Sicht im Mittel erwarten?
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Versuchsreihe die Anzahl der getippten Buchstabentasten um höchstens $20\,\%$ von diesem erwarteten Wert abweicht.
Wie viele Zifferntasten müssten mindestens hinzugefügt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 Buchstabentasten in einer Versuchsreihe getippt werden, auf unter $1\,\%$ fällt?

c) Die Ergebnisse der Versuche lassen die Vermutung aufkommen, dass der Affe die Zifferntasten gegenüber den Buchstabentasten bevorzugt. Daher wird die Nullhypothese
„Der Affe tippt mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $40\,\%$ eine Zifferntaste"
mit einer Stichprobe von 80 Tastaturanschlägen auf einem Signifikanzniveau von $1\,\%$ überprüft.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung M09C1

Lösungslogik

a) Ereignis A ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{5;0,4}(X=5)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl getippter Ziffern an. Berechnung per WTR.
Ereignis B ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{5;0,4}(X\leq 3)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl getippter Ziffern an. Berechnung per WTR.
Ereignis C ist kein Bernoulli-Experiment. Der Ergebnisraum ist
$\Omega=\{(egal;A;F;F;E),(A;F;F;E;eagl)\}$ Berechnung per WTR.

b) *Anzahl Buchstaben auf lange Sicht:*
$P(Buchstabe)=0{,}6$, binomialverteilt, damit $\mu=n\cdot p$.
Wahrscheinlichkeit von $20\ \%$ *Abweichung vom Mittelwert:*
Gesucht ist $B_{20;0,6}(\mu-0{,}2\cdot\mu\leq X\leq\mu+0{,}2\cdot\mu)$
Anzahl hinzuzufügender Zifferntasten:
Gesucht wird p von $B_{20;p}(X\geq 15)<0{,}01$.

c) *Aufgabe zum Signifikanztest*:
Siehe Klausuraufschrieb

Klausuraufschrieb

a) A: „Der Affe tippt nur auf Tasten mit Ziffern."

$$P(Ziffern)=0{,}4\Longrightarrow\ B_{5;0,4}(X=5)\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}01024$$

B: „Der Affe tippt höchstens dreimal eine Ziffer."

$$B_{5;0,4}(X\leq 3)\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}913$$

C: „Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben $A\ F\ F\ E$ direkt hintereinander."

$$P(C)=P(\{A;F;F;E;egal\};\{egal;A;F;F;E\})=2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4\cdot 1\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}0002$$

b) *Anzahl Buchstaben auf lange Sicht:*
$P(Buchstabe)=0{,}6$
$\mu=n\cdot p=20\cdot 0{,}6=12$
Auf lange Sicht gesehen können 12 *Buchstaben erwartet werden.*
Höchstens $20\ \%$ *Abweichung:*
$12\cdot 0{,}2=2{,}4$
$\mu-0{,}2\cdot\mu=10;\quad \mu+0{,}2\cdot\mu=14$

$$B_{20;0,6}(10\leq X\leq 14)=B_{20;0,6}(X\leq 14)-B_{20;0,6}(X\leq 9)\overset{\text{WTR}}{\approx}0{,}874-0{,}128=0{,}746$$

Die Wahrscheinlichkeit bei höchstens $20\ \%$ *Abweichung vom Mittelwert beträgt etwa* $0{,}746$.

Anzahl hinzuzufügender Zifferntasten:

$B_{20;p}(X \geq 15) < 0{,}01$ mit $p = \frac{6}{10+x}$, wobei x die Anzahl hinzuzufügender Zifferntasten bedeutet.

Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.

$1 - B_{20;p}(X \leq 14) < 0{,}01$

$B_{20;p}(X \leq 14) > 0{,}99$

Die Wahrscheinlichkeit $> 0{,}99$ liegt etwa rechts nach dem $2{,}5\sigma$-Bereich.

$\mu = n \cdot p = 20 \cdot p; \quad \sigma = \sqrt{20 \cdot p(1-p)}$

$20 \cdot p + 2{,}5 \cdot \sqrt{20 \cdot p(1-p)} = 14$

$2{,}5 \cdot \sqrt{20 \cdot p(1-p)} = 14 - 20 \cdot p$

$6{,}25 \cdot (20p - 20p^2) = 196 - 560p + 400p^2$

$525p^2 - 685p + 196 = 0$

$p^2 - \frac{685}{525}p + \frac{196}{525} = 0$

$p_{1,2} = 0{,}65 \pm \sqrt{0{,}43 - 0{,}37} = 0{,}65 \pm 0{,}24$

$p_1 \approx 0{,}89; \quad p_2 \approx 0{,}41$

Wir berechnen

$B_{20;0{,}89}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}018$

$B_{20;0{,}41}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9978$

Wir starten mit $p = 0{,}41$ und iterieren gegen größere Werte.

$B_{20;0{,}42}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9971 \qquad B_{20;0{,}43}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9962$

$B_{20;0{,}44}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9950 \qquad B_{20;0{,}45}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9935$

$B_{20;0{,}46}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9917 \qquad B_{20;0{,}47}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9894$

Der gesuchte Wert liegt also zwischen $0{,}46$ und $0{,}47$:

$B_{20;0{,}465}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}991$

$\frac{6}{10+x} = 0{,}465 \qquad | \quad \cdot (10 + x)$

$6 = 4{,}65 + 0{,}465x \qquad | \quad -4{,}65; \; : 0{,}465$

$x = 2{,}9032 \approx 3$

Probe:

$B_{20;\frac{6}{12}}(X \geq 15) = 1 - B_{20;\frac{6}{12}}(x \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}02069 > 0{,}01$

$B_{20;\frac{6}{13}}(X \geq 15) = 1 - B_{20;\frac{6}{13}}(x \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}00857 < 0{,}01$

Es müssen mindestens drei Zifferntasten hinzugefügt werden.

c) Nullhypothese H_0: $p_0 \leq 0{,}4$
Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0{,}4$
Wegen $p_1 > p_0$ ist ein rechtsseitiger Test durchzuführen.
Stichprobenumfang $n = 80$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$
$B_{80;0,4}(X \geq k) = 1 - B_{80;0,4}(X \leq k-1) \leq 0{,}01$
$B_{80;0,4}(X \leq k-1) > 0{,}99$
Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.
Die Wahrscheinlichkeit $> 0{,}99$ liegt etwa rechts nach dem $2{,}5\sigma$-Bereich.
$\mu = n \cdot p = 80 \cdot 0{,}4 = 32; \quad \sigma = \sqrt{32(1-0{,}4)} = 4{,}38$
$\mu + 2{,}5\sigma = 32 + 2{,}5 \cdot 4{,}38 = 42{,}95$
Wir starten mit $k - 1 = 42$
$B_{80;0,4}(X \leq 42) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9912$ $\qquad$ $B_{80;0,4}(X \leq 41) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9842$
$k - 1 = 42 \;\; => \;\; k = 43$
Ablehnungsbereich $\overline{A} = [43; 44; 45; \ldots; 82]$
Annahmebereich $A = [0; 1; 2; \ldots; 42]$
Tippt der Affe höchstens 42 Zifferntasten, wir die H_0-Hypothese beibehalten, ansonsten wird sie verworfen.