Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 09

Lösung M09C1

Lösungslogik

a) Ereignis A ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{5;0,4}(X=5)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl getippter Ziffern an. Berechnung per WTR.
Ereignis B ist ein Bernoulli-Experiment mit $B_{5;0,4}(X \leq 3)$, die Zufallsvariable X gibt die Anzahl getippter Ziffern an. Berechnung per WTR.
Ereignis C ist kein Bernoulli-Experiment. Der Ergebnisraum ist $\Omega = \{(egal; A; F; F; E), (A; F; F; E; eagl)\}$ Berechnung per WTR.

b) *Anzahl Buchstaben auf lange Sicht:*
$P(Buchstabe) = 0{,}6$, binomialverteilt, damit $\mu = n \cdot p$.
Wahrscheinlichkeit von $20\,\%$ *Abweichung vom Mittelwert:*
Gesucht ist $B_{20;0,6}(\mu - 0{,}2 \cdot \mu \leq X \leq \mu + 0{,}2 \cdot \mu)$
Anzahl hinzuzufügender Zifferntasten:
Gesucht wird p von $B_{20;p}(X \geq 15) < 0{,}01$.

c) *Aufgabe zum Signifikanztest*:
Siehe Klausuraufschrieb

Klausuraufschrieb

a) A: „Der Affe tippt nur auf Tasten mit Ziffern."

$$P(Ziffern) = 0{,}4 \Longrightarrow \quad B_{5;0,4}(X=5) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}01024$$

B: „Der Affe tippt höchstens dreimal eine Ziffer."

$$B_{5;0,4}(X \leq 3) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}913$$

C: „Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben $A\ F\ F\ E$ direkt hintereinander."

$$P(C) = P(\{A; F; F; E; egal\}; \{egal; A; F; F; E\}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot 1 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0002$$

b) *Anzahl Buchstaben auf lange Sicht:*
$P(Buchstabe) = 0{,}6$
$\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}6 = 12$
Auf lange Sicht gesehen können 12 *Buchstaben erwartet werden.*
Höchstens $20\,\%$ *Abweichung:*
$12 \cdot 0{,}2 = 2{,}4$
$\mu - 0{,}2 \cdot \mu = 10; \quad \mu + 0{,}2 \cdot \mu = 14$

$$B_{20;0,6}(10 \leq X \leq 14) = B_{20;0,6}(X \leq 14) - B_{20;0,6}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}874 - 0{,}128 = 0{,}746$$

Die Wahrscheinlichkeit bei höchstens $20\,\%$ *Abweichung vom Mittelwert beträgt etwa* $0{,}746$*.*

Anzahl hinzuzufügender Zifferntasten:

$B_{20;p}(X \geq 15) < 0{,}01$ mit $p = \frac{6}{10+x}$, wobei x die Anzahl hinzuzufügender Zifferntasten bedeutet.

Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.

$1 - B_{20;p}(X \leq 14) < 0{,}01$

$B_{20;p}(X \leq 14) > 0{,}99$

Die Wahrscheinlichkeit $> 0{,}99$ liegt etwa rechts nach dem $2{,}5\sigma$-Bereich.

$\mu = n \cdot p = 20 \cdot p; \quad \sigma = \sqrt{20 \cdot p(1-p)}$

$20 \cdot p + 2{,}5 \cdot \sqrt{20 \cdot p(1-p)} = 14$

$2{,}5 \cdot \sqrt{20 \cdot p(1-p)} = 14 - 20 \cdot p$

$6{,}25 \cdot (20p - 20p^2) = 196 - 560p + 400p^2$

$525p^2 - 685p + 196 = 0$

$p^2 - \frac{685}{525}p + \frac{196}{525} = 0$

$p_{1,2} = 0{,}65 \pm \sqrt{0{,}43 - 0{,}37} = 0{,}65 \pm 0{,}24$

$p_1 \approx 0{,}89; \quad p_2 \approx 0{,}41$

Wir berechnen

$B_{20;0{,}89}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}018$

$B_{20;0{,}41}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9978$

Wir starten mit $p = 0{,}41$ und iterieren gegen größere Werte.

$B_{20;0{,}42}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9971$ $\quad$ $B_{20;0{,}43}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9962$

$B_{20;0{,}44}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9950$ $\quad$ $B_{20;0{,}45}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9935$

$B_{20;0{,}46}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9917$ $\quad$ $B_{20;0{,}47}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9894$

Der gesuchte Wert liegt also zwischen $0{,}46$ und $0{,}47$:

$B_{20;0{,}465}(X \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}991$

$\frac{6}{10+x} = 0{,}465 \qquad | \quad \cdot (10+x)$

$6 = 4{,}65 + 0{,}465x \qquad | \quad -4{,}65;\ : 0{,}465$

$x = 2{,}9032 \approx 3$

Probe:

$B_{20;\frac{6}{12}}(X \geq 15) = 1 - B_{20;\frac{6}{12}}(x \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}02069 > 0{,}01$

$B_{20;\frac{6}{13}}(X \geq 15) = 1 - B_{20;\frac{6}{13}}(x \leq 14) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}00857 < 0{,}01$

Es müssen mindestens drei Zifferntasten hinzugefügt werden.

c) Nullhypothese H_0: $p_0 \leq 0{,}4$
Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0{,}4$
Wegen $p_1 > p_0$ ist ein rechtsseitiger Test durchzuführen.
Stichprobenumfang $n = 80$
Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$
$B_{80;0,4}(X \geq k) = 1 - B_{80;0,4}(X \leq k-1) \leq 0{,}01$
$B_{80;0,4}(X \leq k-1) > 0{,}99$
Da eine direkte Lösung mit dem WTR nicht mehr möglich ist, muss ein iteratives Verfahren durchgeführt werden.
Die Wahrscheinlichkeit $> 0{,}99$ liegt etwa rechts nach dem $2{,}5\sigma$-Bereich.
$\mu = n \cdot p = 80 \cdot 0{,}4 = 32; \quad \sigma = \sqrt{32(1-0{,}4)} = 4{,}38$
$\mu + 2{,}5\sigma = 32 + 2{,}5 \cdot 4{,}38 = 42{,}95$
Wir starten mit $k - 1 = 42$
$B_{80;0,4}(X \leq 42) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9912$ $\qquad$ $B_{80;0,4}(X \leq 41) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9842$
$k - 1 = 42 \; => \; k = 43$
Ablehnungsbereich $\overline{A} = [43; 44; 45; \dots; 82]$
Annahmebereich $A = [0; 1; 2; \dots; 42]$
Tippt der Affe höchstens 42 Zifferntasten, wir die H_0-Hypothese beibehalten, ansonsten wird sie verworfen.