Aufgabe M10C1

Nach Information des Robert-Koch-Institutes sind in Ost-Deutschland (einschl. Berlin) $32\,\%$ der Bundesbürger über 12 Jahre gegen Grippe geimpft, in West-Deutschland dagegen nur $15\,\%$.
In den westlichen Bundesländern leben $79{,}3\,\%$ aller Bundesbürger über 12 Jahre.

a) Eine Person, die über 12 Jahre alt ist, wird zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person geimpft?

b) Berechnen Sie, dass von 12 zufällig ausgesuchten Personen aus den östlichen Bundesländern
(1) keine Person geimpft ist;
(2) mindestens 10 Personen nicht geimpft sind;
(3) mehr als 8 und höchstens 10 Personen geimpft sind.

c) Das Robert-Mayer-Gymnasium liegt in West-Deutschland und hat zurzeit 1030 Schülerinnen und Schüler über 12 Jahre.
Bestimmen Sie einen Schätzwert für die Anzahl der geimpften Schüler dieses Gymnasiums.
Ermitteln Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl der geimpften Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $95\,\%$ liegt.

d) Personen über 12 Jahre aus den westlichen Bundesländern werden für ein Interview zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie, wie viele Personen man mindestens auswählen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $98\,\%$ mindestens eine geimpfte Person zu erfassen.

e) Von dem verwendeten Impfserum wird behauptet, dass höchstens $10\,\%$ der Geimpften trotz einer Impfung an Grippe erkranken. 300 zufällig ausgewählte Personen werden mit diesem Serum geimpft. Es erkranken 38 Personen.

Untersuchen Sie die Behauptung in der Art eines Hypothesentests mit dem Signifikanzniveau von $5\,\%$ und geben Sie eine begründete Entscheidung an.
Beschreiben Sie die Bedeutung der Fehler 1. Art und 2. Art im Zusammenhang dieses Tests.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art im Fall $p = 0{,}1$ und die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art im Fall $p = 0{,}15$.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 10

Lösung M10C1

Lösungslogik

a) *Wahrscheinlichkeit für eine geimpfte Person:*
Da nicht ausgesagt ist, ob die Person aus Ost- oder West-Deutschland stammt, gilt
Person geimpft **und** ostdeutsch **oder** Person geimpft **und** westdeutsch.

b) *Diverse Wahrscheinlichkeiten:*
Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung, Berechnung mit dem WTR.

c) *Schätzwert Anzahl geimpfter Schüler*:
Anzahl Schülerinnen und Schüler gesamt multipliziert mit Prozentsatz-West geimpfter Personen (Erwartungswert der Binomialverteilung).
Ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall von $95\,\%$:
Alternative 1: Anwendung der Sigma-Regeln
Alternative 2: Berechnen der Anzahl k Erfolge deren Wahrscheinlichkeit $0{,}025$ (oder $0{,}975$) ist.

d) Gesucht ist der Stichprobenumfang n. Es soll gelten:
$B_{n;0,15}(X \geq 1) \geq 0{,}98$

e) Die H_0-Hypothese behauptet: Höchstens $10\,\%$ der geimpften Personen erkranken. Somit ist $p_0 \leq 0{,}1$. Die H_1-Hypothese wird diese Aussage bezweifeln und behaupten, dass mehr als $10\,\%$ erkranken. Somit ist $p_1 > 0{,}1$, $p_1 > p_0$ Es ist ein rechtsseitiger Test durchzuführen mit einem Stichprobenumfang von $n = 300$ und einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$.
Erläuterung des Fehlers 1. Art bzw. 2. Art siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Wahrscheinlichkeit für eine geimpfte Person:*
$P(Person\ geimpft) = P(geimpftost; ostdeutsch) + P(geimpftwest; westdeutsch)$
$P(Person\ geimpft) = 0{,}32 \cdot 0{,}207 + 0{,}15 \cdot 0{,}793 = 0{,}1852$
Die ausgewählte Person ist mit etwa $18{,}5\,\%$ *geimpft.*

b) *Diverse Wahrscheinlichkeiten:*
A: Keine Person ist geimpft.
$P(A) = B_{12;0,32}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0098 \approx 1\,\%$
B: Mindestens 10 Personen sind nicht geimpft.
$P(B) = B_{12;0,68}(X \geq 10) = 1 - B_{12;0,68}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2078 \approx 20{,}8\,\%$
C: Mehr als 8 und höchstens 10 Personen sind geimpft.
$P(C) = B_{12;0,32}(9 \leq X \leq 10) = B_{12;0,32}(X \leq 10) - B_{12;0,32}(X \leq 8)$
$\overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9999 - 0{,}9972 = 0{,}0027 \approx 0{,}3\,\%$

c) *Schätzwert Anzahl geimpfter Schüler*:
$W = 1030 \cdot 0{,}15 = 154{,}5$
Etwa Schülerinnen und Schüler des Robert-Mayer-Gymnasiums sind geimpft.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 10

Ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall von $95\,\%$:

Alternative 1: Anwendung der Sigma-Regeln

Die $1{,}96\sigma$-Umgebung entspricht dem gesuchten Intervall von $95\,\%$

$\mu = n \cdot p = 154{,}5; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{154{,}5 \cdot 0{,}85} \approx 11{,}46$

$I = [\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma] = [154{,}5 - 22{,}46; 154{,}5 + 22{,}46] = [132{,}04; 176{,}96]$

$I^* = [132; 177]$

Alternative 2: Berechnen der Anzahl k Erfolge deren Wahrscheinlichkeit $0{,}025$ (bzw. 0,9725) ist.

$B_{1030;0,15}(X \leq k) = 0{,}025$

Wir starten eine Iteration nach unten mit dem WTR mit $k = 150$.

$B_{1030;0,15}(X \leq 150) = 0{,}367$ $\quad B_{1030;0,15}(X \leq 140) = 0{,}11$

$B_{1030;0,15}(X \leq 130) = 0{,}0165$ $\quad B_{1030;0,15}(X \leq 131) = 0{,}0206$

$B_{1030;0,15}(X \leq 132) = 0{,}0256$

Damit ist der gesuchte Wert $k = 132$

$B_{1030;0,15}(X \leq k) = 0{,}9725$

Wir starten erneut mit $k = 150$ und iterieren nach oben.

$B_{1030;0,15}(X \leq 150) = 0{,}367$ $\quad B_{1030;0,15}(X \leq 160) = 0{,}702$

$B_{1030;0,15}(X \leq 170) = 0{,}9173$ $\quad B_{1030;0,15}(X \leq 180) = 0{,}987$

$B_{1030;0,15}(X \leq 179) = 0{,}984$ $\quad B_{1030;0,15}(X \leq 178) = 0{,}9804$

$B_{1030;0,15}(X \leq 177) = 0{,}976$ $\quad B_{1030;0,15}(X \leq 176) = 0{,}9709$

Damit ist der gesuchte Wert $k = 177$

$I = [132; 177]$

d) $B_{n;0,15}(X \geq 1) \geq 0{,}98$

$1 - B_{n;0,15}(X = 0) \geq 0{,}98$

$B_{n;0,15}(X = 0) \leq 1 - 0{,}98$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^n \leq 0{,}02$

$0{,}85^n \leq 0{,}02 \qquad | \quad ln$

$n \cdot \ln(0{,}85) \leq \ln(0{,}02) \qquad | \quad : \ln(0{,}85)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}85)} \approx 24{,}07$

Es müssen mindestens 25 Personen ausgewählt werden.

e) $H_0\colon\ p_0 \leq 0{,}1; \quad H_1\colon\ p_1 > 0{,}1$

Rechtsseitiger Test mit $n = 300$ und $\alpha = 0{,}05$.

$B_{300;0,1}(X \geq k) \leq 0{,}05$

$1 - B_{300;0,1}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$

$B_{300;0,1}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$

$A = [0; 1; 2; \ldots . k-1]; \quad \overline{A} = [k; k+1; k+2; \ldots 300]$

Eine Wahrscheinlichkeit von $0{,}95$ liegt rechts des etwa $1{,}64\sigma$-Bereichs.

$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}1 = 30; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{30 \cdot 0{,}9} \approx 5{,}20$

$\mu + 1{,}64 \cdot \sigma = 30 + 1{,}64 \cdot 5{,}2 = 39{,}528$

Wir starten mit $k - 1 = 39$:

$B_{300;0,1}(X \leq 39) \approx 0{,}9622$ $\quad B_{300;0,1}(X \leq 38) \approx 0{,}945$

$k - 1 = 39$

$k = 40$

$A = [0; 1; 2; \ldots 39] \qquad \overline{A} = [40; 41; 42; \ldots 300]$

Da 38 Personen erkrankten ($38 \in A$) ist die H_0-Hypothese beizubehalten.

Ein Fehler der 1. Art entsteht, wenn man die H_0-Hypothese ablehnt, obwohl sie dennoch stimmt. Dies bedeutet im Zusammenhang, dass man aufgrund einer zufällig hohen Anzahl Erkrankter in der Stichprobe annimmt, dass mehr als $10\,\%$ Geimpfter erkranken, obwohl das in Wahrheit nicht stimmt.

Ein Fehler der 2. Art entsteht, wenn man die H_0-Hypothese beibehält, obwohl sie falsch ist. Dies bedeutet im Zusammenhang, dass man aufgrund einer zufällig niedrigen Anzahl Erkrankter in der Stichprobe annimmt, dass höchstens $10\,\%$ Geimpfter erkranken, obwohl das in Wahrheit nicht stimmt.

Fehler der 1. Art bei $p_0 \leq 0{,}1$:
$1 - B_{300;0{,}1}(X \leq 39) \approx 1 - 0{,}9622 = 0{,}0378 \approx 3{,}8\,\%$
Fehler der 2. Art bei $p_0 \leq 0{,}15$
$B_{300;0{,}15}(X \leq 39) \approx 0{,}1879 \approx 18{,}8\,\%$