Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 10

Lösung M10C1

Lösungslogik

a) *Wahrscheinlichkeit für eine geimpfte Person:*
Da nicht ausgesagt ist, ob die Person aus Ost- oder West-Deutschland stammt, gilt
Person geimpft **und** ostdeutsch **oder** Person geimpft **und** westdeutsch.

b) *Diverse Wahrscheinlichkeiten:*
Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung, Berechnung mit dem WTR.

c) *Schätzwert Anzahl geimpfter Schüler*:
Anzahl Schülerinnen und Schüler gesamt multipliziert mit Prozentsatz-West geimpfter Personen (Erwartungswert der Binomialverteilung).
Ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall von $95\,\%$*:*
Alternative 1: Anwendung der Sigma-Regeln
Alternative 2: Berechnen der Anzahl k Erfolge deren Wahrscheinlichkeit $0{,}025$ (oder $0{,}975$) ist.

d) Gesucht ist der Stichprobenumfang n. Es soll gelten:
$B_{n;0,15}(X \geq 1) \geq 0{,}98$

e) Die H_0-Hypothese behauptet: Höchstens $10\,\%$ der geimpften Personen erkranken. Somit ist $p_0 \leq 0{,}1$. Die H_1-Hypothese wird diese Aussage bezweifeln und behaupten, dass mehr als $10\,\%$ erkranken. Somit ist $p_1 > 0{,}1$, $p_1 > p_0$ Es ist ein rechtsseitiger Test durchzuführen mit einem Stichprobenumfang von $n = 300$ und einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$.
Erläuterung des Fehlers 1. Art bzw. 2. Art siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Wahrscheinlichkeit für eine geimpfte Person:*
$P(Person\ geimpft) = P(geimpftost; ostdeutsch) + P(geimpftwest; westdeutsch)$
$P(Person\ geimpft) = 0{,}32 \cdot 0{,}207 + 0{,}15 \cdot 0{,}793 = 0{,}1852$
Die ausgewählte Person ist mit etwa $18{,}5\,\%$ *geimpft.*

b) *Diverse Wahrscheinlichkeiten:*
A: Keine Person ist geimpft.
$P(A) = B_{12;0,32}(X = 0) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0098 \approx 1\,\%$
B: Mindestens 10 Personen sind nicht geimpft.
$P(B) = B_{12;0,68}(X \geq 10) = 1 - B_{12;0,68}(X \leq 9) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2078 \approx 20{,}8\,\%$
C: Mehr als 8 und höchstens 10 Personen sind geimpft.
$P(C) = B_{12;0,32}(9 \leq X \leq 10) = B_{12;0,32}(X \leq 10) - B_{12;0,32}(X \leq 8)$
$\overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9999 - 0{,}9972 = 0{,}0027 \approx 0{,}3\,\%$

c) *Schätzwert Anzahl geimpfter Schüler*:
$W = 1030 \cdot 0{,}15 = 154{,}5$
Etwa Schülerinnen und Schüler des Robert-Mayer-Gymnasiums sind geimpft.

Ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall von $95\,\%$*:*

Alternative 1: Anwendung der Sigma-Regeln

Die $1{,}96\sigma$-Umgebung entspricht dem gesuchten Intervall von $95\,\%$

$\mu = n \cdot p = 154{,}5; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{154{,}5 \cdot 0{,}85} \approx 11{,}46$

$I = [\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma] = [154{,}5 - 22{,}46; 154{,}5 + 22{,}46] = [132{,}04; 176{,}96]$

$I^* = [132; 177]$

Alternative 2: Berechnen der Anzahl k Erfolge deren Wahrscheinlichkeit $0{,}025$ (bzw. 0,9725) ist.

$B_{1030;0,15}(X \leq k) = 0{,}025$

Wir starten eine Iteration nach unten mit dem WTR mit $k = 150$.

$B_{1030;0,15}(X \leq 150) = 0{,}367$ $\quad$ $B_{1030;0,15}(X \leq 140) = 0{,}11$

$B_{1030;0,15}(X \leq 130) = 0{,}0165$ $\quad$ $B_{1030;0,15}(X \leq 131) = 0{,}0206$

$B_{1030;0,15}(X \leq 132) = 0{,}0256$

Damit ist der gesuchte Wert $k = 132$

$B_{1030;0,15}(X \leq k) = 0{,}9725$

Wir starten erneut mit $k = 150$ und iterieren nach oben.

$B_{1030;0,15}(X \leq 150) = 0{,}367$ $\quad$ $B_{1030;0,15}(X \leq 160) = 0{,}702$

$B_{1030;0,15}(X \leq 170) = 0{,}9173$ $\quad$ $B_{1030;0,15}(X \leq 180) = 0{,}987$

$B_{1030;0,15}(X \leq 179) = 0{,}984$ $\quad$ $B_{1030;0,15}(X \leq 178) = 0{,}9804$

$B_{1030;0,15}(X \leq 177) = 0{,}976$ $\quad$ $B_{1030;0,15}(X \leq 176) = 0{,}9709$

Damit ist der gesuchte Wert $k = 177$

$I = [132; 177]$

d) $B_{n;0,15}(X \geq 1) \geq 0{,}98$

$1 - B_{n;0,15}(X = 0) \geq 0{,}98$

$B_{n;0,15}(X = 0) \leq 1 - 0{,}98$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^n \leq 0{,}02$

$0{,}85^n \leq 0{,}02 \quad | \quad ln$

$n \cdot \ln(0{,}85) \leq \ln(0{,}02) \quad | \quad : \ln(0{,}85)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}85)} \approx 24{,}07$

Es müssen mindestens 25 Personen ausgewählt werden.

e) $H_0\colon\ p_0 \leq 0{,}1; \quad H_1\colon\ p_1 > 0{,}1$

Rechtsseitiger Test mit $n = 300$ und $\alpha = 0{,}05$.

$B_{300;0,1}(X \geq k) \leq 0{,}05$

$1 - B_{300;0,1}(X \leq k-1) \leq 0{,}05$

$B_{300;0,1}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$

$A = [0; 1; 2; \ldots . k-1]; \quad \overline{A} = [k; k+1; k+2; \ldots 300]$

Eine Wahrscheinlichkeit von $0{,}95$ liegt rechts des etwa $1{,}64\sigma$-Bereichs.

$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}1 = 30; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{30 \cdot 0{,}9} \approx 5{,}20$

$\mu + 1{,}64 \cdot \sigma = 30 + 1{,}64 \cdot 5{,}2 = 39{,}528$

Wir starten mit $k - 1 = 39$:

$B_{300;0,1}(X \leq 39) \approx 0{,}9622$ $\quad$ $B_{300;0,1}(X \leq 38) \approx 0{,}945$

$k - 1 = 39$

$k = 40$

$A = [0; 1; 2; \ldots 39] \quad \overline{A} = [40; 41; 42; \ldots 300]$

Da 38 Personen erkrankten ($38 \in A$) ist die H_0-Hypothese beizubehalten.

Ein Fehler der 1. Art entsteht, wenn man die H_0-Hypothese ablehnt, obwohl sie dennoch stimmt. Dies bedeutet im Zusammenhang, dass man aufgrund einer zufällig hohen Anzahl Erkrankter in der Stichprobe annimmt, dass mehr als $10\ \%$ Geimpfter erkranken, obwohl das in Wahrheit nicht stimmt.

Ein Fehler der 2. Art entsteht, wenn man die H_0-Hypothese beibehält, obwohl sie falsch ist. Dies bedeutet im Zusammenhang, dass man aufgrund einer zufällig niedrigen Anzahl Erkrankter in der Stichprobe annimmt, dass höchstens $10\ \%$ Geimpfter erkranken, obwohl das in Wahrheit nicht stimmt.

Fehler der 1. Art bei $p_0 \leq 0{,}1$:
$1 - B_{300;0,1}(X \leq 39) \approx 1 - 0{,}9622 = 0{,}0378 \approx 3{,}8\ \%$
Fehler der 2. Art bei $p_0 \leq 0{,}15$
$B_{300;0,15}(X \leq 39) \approx 0{,}1879 \approx 18{,}8\ \%$