Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 11

Lösung M11C1

Lösungslogik

a) *Mindestens* 6 *Lampen der Firma* A *von* 10 *nicht defekt:*
Binomialverteilung mit $n = 10$, $p = 0{,}81$ für nicht defekt und $X \geq 6$.
$10\,\%$ *Abweichung vom Mittelwert der Anzahl defekter Lampen von* 500 *Lampen:*
Berechnung des Mittelwertes und jeweils $10\,\%$ Abweichung nach links und nach rechts ergibt untere und obere Anzahl defekter Lampen.

b) *Wahrscheinlichkeit, dass Händler den Karton annimmt:*
Keine Binomialverteilung, da Ziehen ohne Zurücklegen.
Wahrscheinlichkeit für Kartonannahme mindestens $50\,\%$*:*
Nach wie vor keine Binomialverteilung, da Ziehen ohne Zurücklegen. Es müssen sich jetzt $30 - n$ nicht defekte Lampen im Karton befinden mit n als Anzahl defekter Lampen.

c) *Mittel des pro Lampe zu erwartenden Gewinns des Discounters:*
Aufgabe zum Erwartungswert. Wir stellen die Beträge der Erstattung von defekten Lampen zu den Erträgen aus dem Verkauf von nicht defekten Lampen und ihre Wahrscheinlichkeit in einer Tabelle gegenüber.

Klausuraufschrieb

a) *Mindestens* 6 *Lampen der Firma* A *von* 10 *nicht defekt:*

$B_{10;0,91}(X \geq 6) = 1 - B_{10;0,91}(X \leq 5) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}99899$

$10\,\%$ *Abweichung vom Mittelwert der Anzahl defekter Lampen von* 500 *Lampen:*
$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}09 = 45$
$45 \cdot 0{,}1 = 4{,}5$ ➔ Abweichung ± 4 Lampen.
$B_{500;0,91}(41 \leq X \leq 49) = B_{500;0,91}(X \leq 49) - B_{500;0,91}(X \leq 40)$
$B_{500;0,91}(41 \leq X \leq 49) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}5181$
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens $10\,\%$ *abweicht beträgt etwa* $51{,}8\,\%$*.*

b) *Wahrscheinlichkeit, dass Händler den Karton annimmt:*
$P(Karton\ wird\ angenommen) = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} = 0{,}6345$
Der Händler nimmt den Karton mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $63{,}5\,\%$ *an.*

Wahrscheinlichkeit für Kartonannahme mindestens $50\,\%$*:*
$\frac{30-n}{30} \cdot \frac{29-n}{29} \geq 0{,}5$
$(30 - n) \cdot (29 - n) \geq 0{,}5 \cdot 30 \cdot 29$
$870 - 59n + n^2 \geq 435 \qquad | \quad -435$
$n^2 - 59n + 435 \geq 0$
$n_{1,2} = 29{,}5 \pm \sqrt{870{,}25 - 435} = 29{,}5 \pm \sqrt{435{,}25} = 29{,}5 \pm 20{,}86$
$n_1 \approx 50;\ \ n_2 \approx 8{,}64$
n_1 ist nicht Teil der Lösung, da zu groß.

Untersuchung, ob 8 oder 9:

$\frac{30-8}{30} \cdot \frac{29-8}{29} \approx 0{,}531$

$\frac{30-9}{30} \cdot \frac{29-9}{29} \approx 0{,}483$

Es dürfen höchsten 8 *defekte Lampen in einem Karton sein.*

c) *Mittel des pro Lampe zu erwartenden Gewinns des Discounters:*
Berechnung des Erwartungswertes:
Tabelle der Ergebnisse

	Lampe Firma A defekt	Lampe Firma A intakt	Lampe Firma B defekt	Lampe Firma B intakt
X_i	$-0{,}98$ €	$0{,}51$ €	$-1{,}02$ €	$0{,}47$ €
p_i	$0{,}35 \cdot 0{,}09$	$0{,}35 \cdot 0{,}91$	$0{,}65 \cdot 0{,}07$	$0{,}65 \cdot 0{,}93$
$X_i \cdot p_i$	$-0{,}031$	$0{,}162$	$-0{,}046$	$0{,}284$
$\sum_{i=1}^{3} X_i \cdot p_i$	$-0{,}031 + 0{,}162 - 0{,}046 + 0{,}284 \approx 0{,}37$			

Der Discounter verdient pro Lampe etwa $0{,}37$ €*.*

Lösung M11C2

Lösungslogik

a) *Wahrscheinlichkeit für genau 40 1-Personen-Haushalte:*
Binomialverteilung mit $n = 100$, $p = 0{,}405$ und $X = 40$.
Wahrscheinlichkeit für mindestens die Hälfte Mehrpersonen-Haushalte:
Binomialverteilung mit $n = 100$, $p = 0{,}595$ und $X \geq 50$ (Mehrpersonen-Haushalte sind alle Haushalte außer den 1-Personenhaushalten).
Wahrscheinlichkeit für unter erste 10 Haushalte kein 4-Personen-Haushalt und unter dem Rest höchstens fünf 4-Personen-Haushalte:
Binomialverteilung mit $n = 10$, $p = 0{,}092$ und $X = 0$ und $n = 90$, $p = 0{,}092$ und $X \leq 5$.

b) *Anzahl der Haushalte, damit mindestens* $95\,\%$ *mehr als* 20 2*-Perosnen-Haushalte darunter sind:*
Binomialverteilung mit gesuchtem n, $p = 0{,}345$ und $X \geq 21$ soll $\geq 0{,}95$ sein.

c) *Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte in Deutschland:*
Wir berechnen an Hand der Prozentzahlen pro Haushalt die Gesamtheit an Personen für fünf Haushalte (von 1-Personen-Haushalt bis Haushalte mit mindestens 5 Personen und dividieren dieses Mittel durch 80 Millionen Einwohner. (Für die mindestens 5-Personen-Haushalte wird vereinfachend die Anzahl 5 Personen angenommen).

d) *Entscheidungsregel eines Hypothesentests:*
Mit $p_1 > p_0$ handelt es sich um einen rechtsseitigen Test.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Stochastik Satz 11

Klausuraufschrieb

a) *Wahrscheinlichkeit für genau 40 1-Personen-Haushalte:*

$B_{100;0,405}(X=40) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0808$

Wahrscheinlichkeit für mindestens die Hälfte Mehrpersonen-Haushalte:

$B_{100;0,595}(X \geq 50) = 1 - B_{100;0,595}(X \leq 49) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9784$

Wahrscheinlichkeit für unter erste 10 Haushalte kein 4-Personen-Haushalt und unter dem Rest höchstens fünf 4-Personen-Haushalte:

$B_{10;0,092}(X=0) \cdot B_{90;0,092}(X \leq 5) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}38094 \cdot 0{,}1541 \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0587$

b) *Anzahl der Haushalte, damit mindestens* $95\,\%$ *mehr als* 20 2*-Perosnen-Haushalte darunter sind:*

$B_{n;0,345}(X \geq 21) \geq 0{,}95$

$B_{n;0,345}(X \leq 20) < 0{,}05$

Iterationstabelle

n	$B_{n;0,345}(X \leq 20)$
84	0,023
82	0,033
81	0,038
80	0,044
79	0,0523

Es müssen mindestens 80 *Haushalte ausgewählt werden.*

c) *Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte in Deutschland:*

Geht man vereinfachend davon aus, dass in den Haushalten mit mindestens 5 Personen genau fünf Personen leben, so gilt im Mittel an Personen in den fünf Haushalttypen:

$1 \cdot 0{,}405 + 2 \cdot 0{,}345 + 3 \cdot 0{,}125 + 4 \cdot 0{,}092 + 5 \cdot 0{,}033 = 2{,}003$

In den fünf Haushaltstypen leben im Mittel 2 Personen.

Anzahl der Haushalte bei $80\,000\,000$ Einwohnern:

$\frac{80000000}{2} = 40000000$

Ein Näherungswert für die Gesamtanzahl der Haushalte in Deutschland im Jahre 2013 beträgt $40\ Mio$ *Haushalte.*

d) *Entscheidungsregel eines Hypothesentests:*

$H_0\colon\ p_0 \leq 0{,}405;\quad H_1\colon p_1 > p_0$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test.

$n = 500;\ \ p = 0{,}405;\ \ \alpha = 0{,}05;\ \ X \geq k;$

$A = [0; k-1];\ \ \overline{A} = [k; 500]$

$B_{500;0,405}(X \geq k) \leq 0{,}05$

$B_{500;0,405}(X \leq k-1) \geq 0{,}95$

$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}405 = 202{,}5$

$\sigma = \sqrt{202{,}5 \cdot 0{,}595} \approx 11$

$\alpha = 0{,}05$ liegt etwa im $1{,}5\ \sigma$-Bereich

$k_{Anfang} = \mu + 1{,}5\sigma = 202{,}5 + 16{,}5 = 219$

Iterationstabelle

$k-1$	$B_{500;0,405}(X \leq k-1)$
219	0,9388
220	0,9400
221	0,9578

$k-1=221$

$k=222$

Sind mindestens 222 *der* 500 *Haushalte 1-Personen-Haushalte, so wird die* H_0*-Hypothese abgelehnt.*