Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2005 BW

Aufgabe A1

1.1 Ein Supermarkt A führt eine neue Zahnpasta ein. In den ersten fünf Wochen ergeben sich folgende wöchentlichen Verkaufszahlen:

Verkaufswoche	1	2	3	4	5
Verkaufte Stückzahl in dieser Woche	26	46	60	76	86

In einem Modell beschreibt die Funktion f der Form $f(x) = \frac{ax+15}{bx+15}$ die verkaufte Stückzahl $f(x)$ innerhalb der Woche x.

a) Bestimmen Sie a und b anhand der Werte der ersten und fünften Woche.
Zeichnen Sie das Schaubild K der Funktion f für das erste Jahr.
Wie entwickeln sich nach diesem Modell die wöchentlichen Verkaufszahlen während des ersten Jahres?
Nennen Sie mögliche Gründe für diese Entwicklung.
(Teilergebnis: $f(x) = \frac{427x+15}{2x+15}$)

b) Bestimmen Sie näherungsweise, wie viele Tuben Zahnpasta der Supermarkt A in den ersten 52 Wochen insgesamt verkauft.
Nach wie vielen Wochen sind insgesamt mehr als 1.500 Tuben verkauft?

c) Gleichzeitig mit dem Supermarkt A bringt der Supermarkt B ein Konkurrenzprodukt auf den Markt. Seine wöchentlichen Verkaufszahlen lassen sich modellhaft durch die Funktion g mit $g(x) = 214 - 214 \cdot e^{-0{,}08x}$ beschreiben.
Zeichnen Sie das Schaubild C dieser Funktion in das Koordinatensystem von Teilaufgabe a) ein.
Mit welchen wöchentlichen Verkaufszahlen kann der Supermarkt B langfristig rechnen?
Wann hat der Supermarkt A den größten Vorsprung an insgesamt verkauften Tuben?
Beschreiben Sie, wie sich anhand der Schaubilder abschätzen lässt, bis zu welchem Zeitpunkt in beiden Supermärkten etwa gleich viele Tuben verkauft sind.

1.2 (Nicht mehr prüfungsrelevant)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$; $x \in \mathbb{R}$ die n–te Ableitung $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$ für $n \geq 1$ besitzt.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2005 BW

Aufgabe A2.1

Gegeben sind zwei Funktionen f und g durch:

$f(x) = cos\ x; \quad \mathbb{D}_f = [-\pi; \pi]$

und

$g(x) = \frac{1}{1-cosx}; \quad \mathbb{D}_g = \mathbb{D}_f \backslash \{0\}$

a) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und g.
Das Schaubild von f schließt mit der x–Achse eine Fläche ein. Wie groß ist deren Inhalt?
Die Funktion f soll durch eine quadratische Funktion h ersetzt werden, welche die gleichen Nullstellen wie f hat.
Bestimmen Sie eine Gleichung von h so, dass die Schaubilder von f und h mit der x–Achse gleich große Flächen einschließen.

b) Bestimmen Sie die Punkte auf dem Schaubild von g, die vom Hochpunkt des Schaubilds von f den kleinsten Abstand haben.

c) Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$f_t(x) = t \cdot cos\ x; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Das Schaubild der Funktion f_t schließt mit der x–Achse eine Fläche ein. Bei Rotation dieser Fläche um die x–Achse entsteht ein Drehkörper.
Berechnen Sie dessen Volumen in Abhängigkeit von t.
Berechnen Sie t^* so, dass die 1. Winkelhalbierende das Schaubild von f_{t^*} rechtwinklig schneidet.

Aufgabe A2.2

Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch eine Funktion f mit

$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}; \ t \geq 0$

beschrieben (t in Jahren seit Untersuchungsbeginn, $f(t)$ in Millionen pro Jahr).

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f für $0 \leq t \leq 6$.
Untersuchen Sie das Verhalten von t für $t \longrightarrow \infty$.
Weisen Sie nach, dass f für $t > 0$ monoton abnimmt.
Bedeutet dies, dass der Fischbestand abnimmt?
Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit

$F(t) = \frac{-1}{e^t+1}$

eine Stammfunktion von f ist.
Welcher Fischbestand ist zwei Jahre nach Beginn der Untersuchung zu erwarten?
Welcher Fischbestand ist langfristig zu erwarten?

Aufgabe 2.3

Ein Teich bietet Platz für maximal 7.000 Fische. In einem Modell soll angenommen werden, dass die Änderungsrate des Fischbestandes proportional zur Anzahl der noch Platz findenden Fische ist. Anfangs befinden sich 4.000 Fische im Teich. Nach einem Monat sind 4.400 Fische vorhanden.
Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an.
Bestimmen Sie eine Funktion, welche diesen Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Nach wie vielen Monaten sind 5.000 Fische in dem Teich vorhanden?
Wie viele Fische müssten sich am Anfang im Teich befinden, damit bei unveränderten Wachstumsbedingungen erst nach fünf Monaten 5.000 Fische vorhanden sind.