Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2008 BW

Aufgabe A1.1

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt. Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$f(x) = -0{,}125x^3 + 0{,}75x^2 - 3{,}125$ im Bereich $-2{,}5 \leq x < 05$,

dabei weist die positive x-Achse nach Osten ($1\,LE$ entspricht $100\,m$).

a) Skizzieren Sie den Querschnitt des Geländes.
Berechnen Sie die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist.
Quer zum Tal befindet sich in West-Ost-Richtung eine Staumauer. Vom tiefsten Punkt des Tals aus gemessen ist sie $312{,}5\,m$ hoch. Berechnen Sie die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante.
Bevor das Wasser aufgestaut wird, muss die dem See zugewandte Seite der Staumauer versiegelt werden.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

b) In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Yiganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben.
Bestimmen Sie die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.
Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann?

Aufgabe A1.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Die Funktion g ist gegeben durch

$g(x) = \frac{1}{1-2x};\ x \neq 0{,}5.$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass g für alle $n \geq 1$ die n-te Ableitung

$g^{(n)}(x) = 2^n \cdot \frac{n!}{(1-2x)^{n+1}}$

besitzt, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ für $n \geq 1$ gilt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

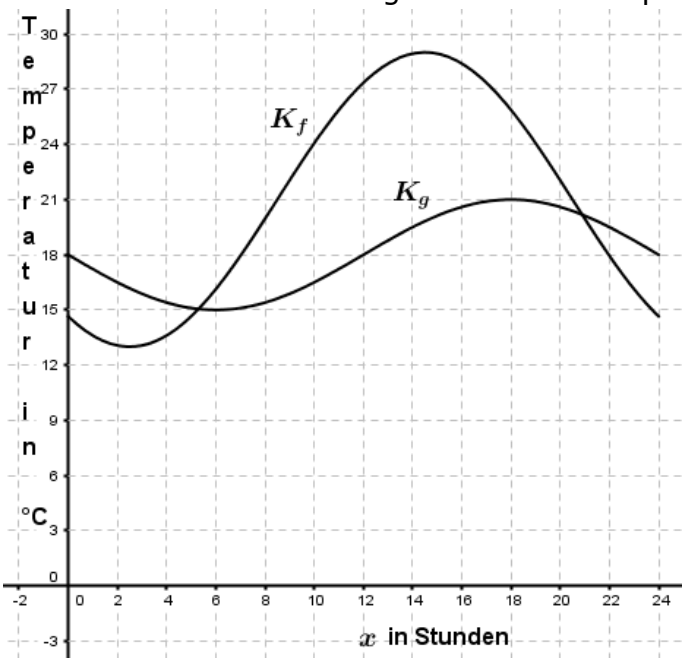
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2008 BW

Aufgabe A2.1

Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion f mit

$$f(x) = 8 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12}(x - 8{,}5)\right) + 21;\ \ 0 \leq x \leq 24$$

beschrieben werden (x in Stunden, $f(x)$ in $°C$), Die Abbildung zeigt das Schaubild K von f sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf K_g.



a) Berechnen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist.
Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens $22\,°C$?
Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten?
Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr.

b) Bestimmen Sie einen Term der Funktion g, der den Temperaturverlauf K_g wiedergibt.
Beschreiben Sie, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = sinx$ entsteht.
Geben Sie eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe K_f und K_g an.
Zu welcher Uhrzeit ist der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur am größten?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch eine Funktion h mit

$$h(x) = 10 \cdot sin\left(\frac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right) + ax + b;\ \ 24 \le x \le 48$$

beschrieben werden kann (x in Stunden, $h(x)$ in $°C$).
Dabei stimmen zum Zeitpunkt $x = 24$ sowohl die durch f und h beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein.
Ermitteln Sie a und b.
Begründen Sie, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term $ax + b$ bestimmt wird.

Aufgabe A2.2

Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1.200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit

$f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}01t};\ \ t \ge 0$ (t in Minuten, $f(t)$ in Liter).

a) Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt?
Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt.
Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde.
Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens $85\,\%$ des Fassungsvermögens betragen.
Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) In einem anderen Behälter mit einem Zufluss und einem Abfluss befinden sich zu Beginn ebenfalls 200 Liter Flüssigkeit. Einerseits fließen pro Minute 10 Liter zu, andererseits beträgt die momentane Abflussrate $1\,\%$ des jeweiligen Inhalts pro Minute.
Dieser Vorgang wird durch die Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ beschrieben.
Geben Sie a und b an.
Zeigen Sie, dass f eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.

c) Der Vorgang in b) wird nun so geändert, dass pro Minute 12 Liter zufließen und die momentane Abflussrate $2\,\%$ des Inhalts pro Minute beträgt. Die anfängliche Flüssigkeitsmenge ist wiederum 200 Liter.
Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der diesen Vorgang beschreibt. Welche Flüssigkeitsmenge ist nach einer Stunde aus diesem Behälter abgeflossen?

Aufgabe A2.3 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Die Folge (a_n) ist gegeben durch

$a_0 = 5;\ \ a_{n+1} = 10 + 0{,}8 \cdot a_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

50 ist eine obere Schranke dieser Folge.
Zeigen Sie damit, dass die Folge monoton wachsend ist. Begründen Sie, dass die Folge konvergiert.
Berechnen Sie den Grenzwert exakt.