Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2009 BW

Lösung A1.1

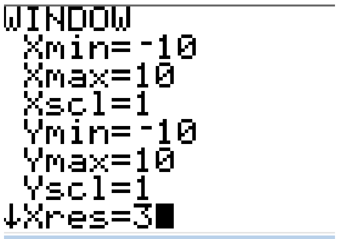
Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

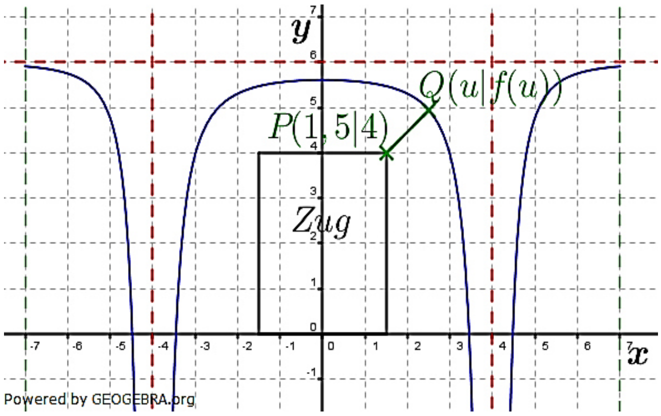
Y1=$6-100/(X^2-16)^2$

Y2=$\frac{d}{dX}(Y1)|_{X=X}$

Y3=$\sqrt{((X-1.5)^2+(Y1-4)^2)}$



a) *Asymptoten:*
Waagrecht: Wir betrachten die Funktionswerte am Rande des Systems ($x \longrightarrow \pm\infty$).
Senkrecht: Wir untersuchen, für welche Werte von x der Nenner der Funktionsgleichung 0 wird.
Nullstellen:
Lösung per GTR.
Nachweis genau einer Extremstelle:
Aus der Grafik des GTR ist nicht eindeutig erkennbar, ob sich im Intervall $[-4;4]$ nicht mehrere Extremstellen befinden. Der Nachweis muss über die $1.$ Ableitung geführt werden (per GTR).



b) *Kubikmeter Stein für Brückenbau:*
Wegen der Achsensymmetrie genügt es die Fläche zu berechnen, die im I. Quadranten liegt und das Ergebnis dann mit 2 zu multiplizieren. Ohne genauere Überlegung wäre dies die Fläche, die die Parallele zur y–Achse mit $y=7$ und $f(x)$ im Intervall $[0;7]$ einschließen. Allerdings ist ein solches Integral wegen der Polstelle bei $x=4$ nicht lösbar. Wir müssen deshalb die Berechnung aufteilen, was am einfachsten nach folgender Methode möglich ist:
$A=a\cdot b$ Fläche Rechteck mit $a=7$ und $b=7$ abzüglich Fläche zwischen $f(x)$ und der x–Achse im Intervall $[0;x_{N_1}]$ abzüglich Fläche zwischen $f(x)$ und der x–Achse im Intervall $[x_{N_2};7]$.

c) *Kleinster Abstand des Zuges:*
Gesucht ist die kürzeste Strecke $\overline{PQ}$ (siehe Grafik). Die Länge einer Strecke bestimmt sich über den Satz des Pythagoras.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2009 BW

Klausuraufschrieb

a) *Asymptoten:*

Waagrecht:

Wegen $\lim\limits_{x\to|\infty|} \frac{100}{(x^2-16)^2} = 0$ ist $\lim\limits_{x\to|\infty|} f(x) = 6$

Die waagrechte Asymptote hat die Gleichung $y = 6$.

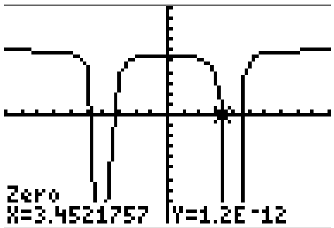
Senkrecht:

$(x^2-16)^2 = 0 \implies x_1 = -4;\ x_2 = 4$

Wegen $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-4;4\}$ liegen bei $x=-4$ und $x=4$ senkrechte Asymptoten (Pole) vor. Wegen $(x^2-16)^2$ sind diese Pole ohne Vorzeichenwechsel.

Die Pole haben die Gleichung $x=-4$ und $x=4$.

Nullstellen von f:



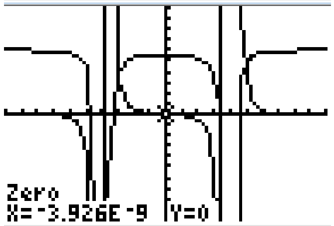
$f(x) = 0 \Longrightarrow\ x_1 \overset{\text{GTR}}{\approx} 3{,}45;\ x_2 \overset{\text{GTR}}{\approx} 4{,}48$

$N_1(3{,}45|0);\ \ N_2(4{,}48|0)$

Wegen der Achsensymmetrie gilt zusätzlich:

$N_3(-3{,}45|0);\ \ N_4(-4{,}48|0)$

Nachweis der Extremstelle:



$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \overset{\text{GTR}}{=} 0$

Es gibt nur eine einzige Lösung für $f'(x) = 0$.

$f(0) \overset{\text{GTR}}{\approx} 5{,}6094$

$f(x)$ hat genau eine Extremstelle, einen Hochpunkt in $HP(0|5{,}6)$.

```
Y1(0)
          5.609375
2(49-∫[0,3.45](Y1)dX→
       37.98307083
Ans*10
       379.8307083
```

b) *Volumen der Brücke:*

$V = A\cdot b$ mit $b = 10\,m$

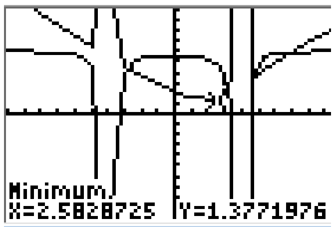
Wegen der Symmetrie von f wird bezüglich A nur der rechte Teil betrachtet.

$A = 2\cdot(49 - \int_0^{3{,}45} f(x)\,dx - \int_{4{,}48}^{7} f(x)dx) \overset{\text{GTR}}{\approx} 38$

$V = A\cdot 10 = 380\,m^3$.

Es werden ca. $380\,m^3$ Stein für die Brücke verbaut.

c) *Kleinster Abstand des Zuges:*



Rechte obere Ecke des Zuges $P(1{,}5|4)$. Abstand zu f ist $Q(u|f(u))$

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$d(u) = \sqrt{(u-1{,}5)^2 + (f(u)-4)^2}$

$d(u)_{min} \overset{\text{GTR}}{\approx} 1{,}377$ für $u \overset{\text{GTR}}{\approx} 2{,}58$.

Der kleinste Abstand des Zuges von der gewölbten Wand beträgt ca. $1{,}38\,m$.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2009 BW

Lösung A1.2

Klausuraufschrieb

(1) Induktionsanfang:
Für $n=1$ erhält man:

$$5^0+5^1=1+5=6 \quad \text{und} \quad \frac{5^2-1}{4}=\frac{24}{4}=6$$

(2) Induktionsschritt:
Induktionsannahme:
Für ein beliebiges $k\geq 1$ gelte:

$$5^0+5^1+5^2+\cdots+5^k=\frac{5^{k+1}-1}{4}$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch

$$5^0+5^1+5^2+\cdots+5^k+k^{k+1}=\frac{5^{k+2}-1}{4}$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}5^0+5^1+5^2+\cdots+5^k+k^{k+1}&=\frac{5^{k+1}-1}{4}+5^{k+1}\\&=\frac{5^{k+1}-1+4\cdot 5^{k+1}}{4}\\&=\frac{5\cdot 5^{k+1}-1}{4}=\frac{5^{k+2}-1}{4}\end{aligned}$$

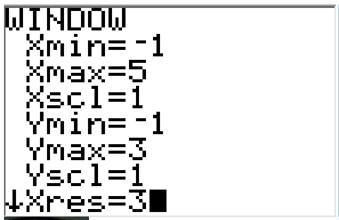
Die Aussage gilt somit auch für $k+1$.
Insgesamt ist damit die Behauptung für alle $n\geq 1$ bewiesen.

Lösung A1.3

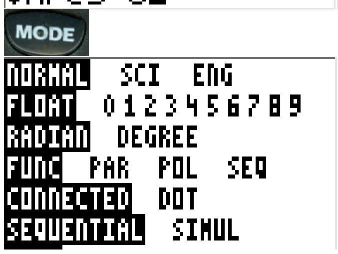
Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

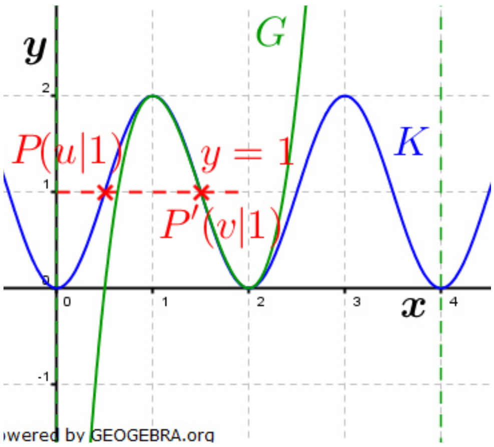
Y1=$2\left(sin(\pi/2*X)\right)^2$
Y2=1
Y3=$4X^3-18X^2+24X-8$
Y4=$abs(Y1-Y3)$



Achtung: GTR-MODE muss auf ***RADIAN*** stehen



a) *Periode von f:*
Die Periode entnehmen wir dem Schaubild. Die Strecke zwischen zwei Hochpunkten ist $2\,LE$ lang.
Hoch- und Tiefpunkte von K:
Per GTR.
Hoch- und Tiefpunkte wiederholen sich alle $k\cdot p;\ k\ \in\ \mathbb{Z}$.
Wert für x mit Funktionswert 1:
Lösung mit dem GTR über
$f(x)\cap y=1$.

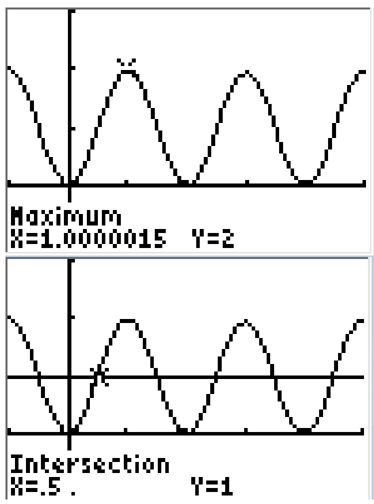


b) *Bestimmung von a und b:*
Aus Teilaufgabe a) kennen wir bereits die Periode. Faktor b ist daraus $b = \frac{2\pi}{p}$.
Wir kennen weiterhin die y–Werte von Hoch und Tiefpunkt. Daraus ermitteln wir a über $a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2}$
Exakter Flächeninhalt:
Zwei benachbarte Nullstellen sind $N_1(0|0)$ und $N_2(2|0)$. Verlangt ist der exakte Flächeninhalt. Damit ist eine Berechnung über den GTR ausgeschlossen. Berechnung über $\int_0^2 f(x)\,dx$.

c) *Bestimmung eines Funktionsterms:*
Die Polynomfunktion dritten Grades hat eine doppelte Nullstelle bei $N_{2,3}(2|0)$, eine unbekannte Nullstelle bei $N_1(c|0)$, geht durch den Hochpunkt $HP(1|2)$ und muss wegen der Punktsymmetrie durch den Wendepunkt von G mit $WP(1{,}5|1)$ verlaufen. Ihre allgemeine Gleichung kann über die Nullstellengleichung mit $g(x) = a(x-2)^2 \cdot (x-c)$ ausgedrückt werden. Über eine Punktprobe mit HP und WP ermitteln wir die beiden Parameter a und c.
Stärkste Abweichung von f und g im Intervall $[1;2]$:
Die stärkste Abweichung ergibt sich aus der Differenzgleichung von f und g. $d(x) = |f(x) - g(x)|$. Lösung mit dem GTR.

Klausuraufschrieb

a) *Periode von f:*
$x_{HP_2} = 3; \quad x_{HP_1} = 1:$
$p = x_{HP_2} - x_{HP_1} = 3 - 1 = 2$
f hat die Periode $p = 2$.
Hoch- und Tiefpunkte von f:
$x_{TP} \overset{GTR}{=} 0; \quad f(0) \overset{GTR}{=} 0; \quad TP(0|0)$
$x_{HP} \overset{GTR}{=} 1; \quad f(1) \overset{GTR}{=} 2; \quad HP(1|2)$
Hoch-, Tiefpunkte wiederholen sich alle Vielfachen von p.
$TP_k(k \cdot p|0); \; k \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; TP_k(2k|0); \; k \in \mathbb{Z}$
$HP_k(1 + k \cdot p|0); \; k \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; HP_k(1 + 2k|0); \; k \in \mathbb{Z}$
Wert für x mit Funktionswert 1:
$f(x) \cap y = 1$
$x_1 \overset{GTR}{=} 0{,}5; \quad x_2 \overset{GTR}{=} 1{,}5$
$f(0{,}5) = 1; \quad f(1{,}5) = 1$
Für $x \in \{0{,}5; 1{,}5\}$ nimmt $f(x)$ im Intervall $[0;2]$ den Funktionswert 1 an.



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2009 BW

b) *Bestimmung von a und b:*

$p = 2 \implies b = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{2-0}{2} = 1$

Der Graph der Funktion ist eine an der x–Achse gespiegelt und um eine Einheit nach oben verschobene Kosinuskurve.

Die Funktion f kann auch in der Form $f(x) = 1 - cos(\pi x)$ angegeben werden.

Exakter Flächeninhalt:

$A_{[0;2]} = \int_0^2 (1 - cos(\pi x))\,dx = \left[x - \frac{1}{\pi} \cdot sin(\pi x)\right]_0^2 = 2 - 0 - (0 - 0) = 2$

Der Inhalt der Fläche ist $A_{[0;2]} = 2$.

c) *Bestimmung eines Funktionsterms:*

$g(x)$: einfache, unbekannte Nullstelle $N_1(c|0)$,
doppelte, bekannte Nullstelle $N_{2,3}(2|0)$,
Hochpunkt $HP(1|2)$,
wegen Symmetrie bekannter Wendepunkt von K, $WP(1{,}5|1)$.

$g(x) = a(x - c) \cdot (x - 2)^2$

(1)	$2 = a(1 - c) \cdot (1 - 2)^2$	| Punktprobe mit HP
(2)	$1 = a(1{,}5 - c) \cdot (1{,}5 - 2)^2$	| Punktprobe mit WP
(1)	$2 = a - ac$	
(2)	$1 = 0{,}375a - 0{,}25ac$	
$4 \cdot (2) - (1)$	$2 = 0{,}5a \implies a = 4$	
$a \longrightarrow (1)$	$2 = 4 - 4c \implies c = 0{,}5$	

$g(x) = 4(x - 0{,}5) \cdot (x - 2)^2 = 4x^3 - 16x^2 + 16x - 2x^2 + 8x - 8$

Die Funktion wird durch den Term $g(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$ beschrieben.

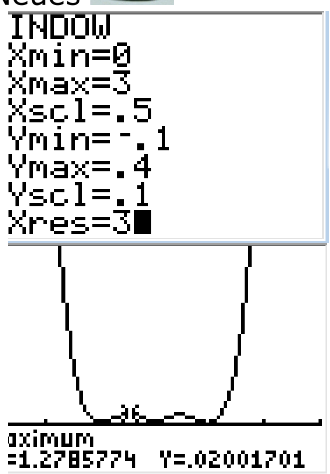
Stärkste Abweichung von f und g im Intervall $[1; 2]$:

$d(x) = |f(x) - g(x)|$

$d(x)_{max} \overset{GTR}{\approx} 0{,}02$ für $x_1 \overset{GTR}{\approx} 1{,}278$ und $x_2 \overset{GTR}{\approx} 1{,}721$

Die Funktionswerte von f und g weichen bei $x_1 \approx 1{,}28$ und $x_2 \approx 1{,}72$ am stärksten voneinander ab und zwar um ca. $0{,}02\,LE$.

Neues WINDOW



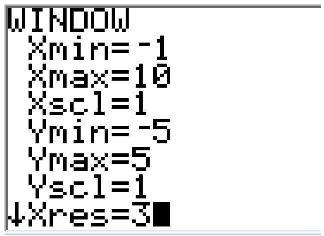
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2009 BW

Lösung A2.1

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1=$100X/((25+X\text{^}2)\text{^}1.5$



Aufhanghöhe der Lampe:
Wir drücken die Strecke d mit dem Satz des Pythagoras anders aus.
Wir bestimmen $cos\alpha$ und ersetzen d und $cos\alpha$ in der gegebenen Gleichung.
Wir erhalten dadurch eine Funktion $H(h)$, deren Maximum wir mit dem GTR bestimmen.

Klausuraufschrieb

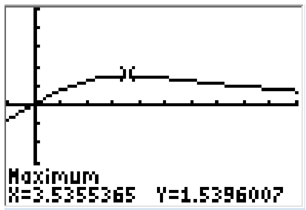
$d=\sqrt{25+h^2}$ | Satz des Pythagoras

$cos(\alpha)=\frac{h}{d}$

$d, cos\alpha \longrightarrow H$

$H=100\cdot\frac{h}{d\cdot d^2}$

$H(h)=100\cdot\frac{h}{(25+h^2)^{\frac{3}{2}}}$



$H(h)_{max} \overset{\text{GTR}}{\approx} 1{,}539$ für $h \overset{\text{GTR}}{\approx} 3{,}5355$

Die Lampen müssen in $3{,}54\,m$ Höhe befestigt werden, damit der Weg in der Mitte möglichst hell beleuchtet wird.

Aufgabe 2.2

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1=$36.5+X*e^{-.1X}$

Y2=$\frac{d}{dX}(Y1)|_{X=X}$

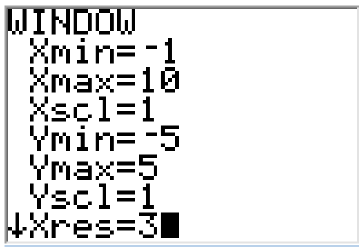
Y3=37

Y4=$Y1(X+2)-Y1$

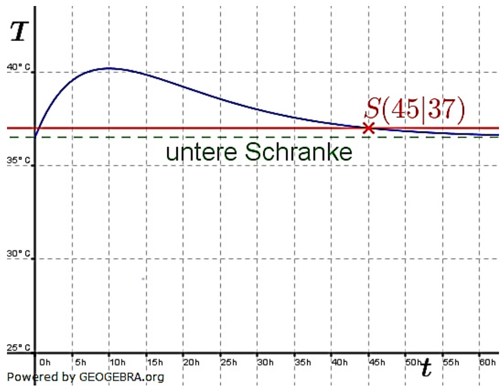
Y5=1

Y6=$36.5+3e^{-.228X}$

Y7=$Y1(X+5)-Y6$



a) *Höchste Temperatur:*
Per GTR
Maximale Temperaturänderung:
In den Wendepunkten von f, per GTR über Minimum und Maximum von f' im Intervall $[0;48]$.



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2009 BW

b) *Körpertemperatur unter $37\,°C$:*
Wir bilden $f(x) \cap y = 37$.
Nachweis der Dauerhaftigkeit:
Wir weisen nach, dass $f(x)$ ab diesem Zeitpunkt monoton fallend ist.
Mittlere Körpertemperatur bis zu diesem Zeitpunkt:
Diese ist $\frac{1}{45}$ der Fläche unter f im Intervall $[0;45]$.
2-*Stunden-Zeitraum der Temperaturzunahme um ein Grad:*
Der Funktionswert der Differenzfunktion von $d(t) = \big(f(t+2) - f(t)\big)$ muss 1 sein. Wir bilden $d(t) \cap y = 1$

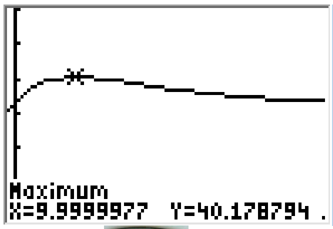
c) *Temperaturverlauf nach Einnahme des Medikamentes.*
Über die Funktionsgleichung für begrenztes Wachstum $g(t) = S + a \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $t \geq 0$ in Stunden nach Einnahme des Medikaments und $g(t)$ in $°C$ und der Schranke $S = 36{,}5$ als normale Körpertemperatur bestimmen wir über die vorgegebenen Werte $f(5) = g(0)$ und $g(2) = 38{,}4$ die Parameter a und k.
Temperatur ohne und mit Medikament:
Der gesuchte Zeitpunkt t (in Stunden) nach Einnahme des Medikamentes liegt $t+5$ Stunden nach dem Ausbruch der Krankheit. Der Temperaturunterschied zum Zeitpunkt t ohne und mit Medikament ist somit die Differenzfunktion $d(t) = f(t+5) - g(t)$ die für $d(t) = 1$ gelöst werden muss.

Klausuraufschrieb

a) *Höchste Temperatur:*

$f(t)_{max} \overset{GTR}{\approx} 40{,}179$ für $t \overset{GTR}{\approx} 9{,}99998$

Die maximale Temperatur wird 10 Stunden nach Ausbruch der Krankheit erreicht und beträgt $40{,}2\,°C$.



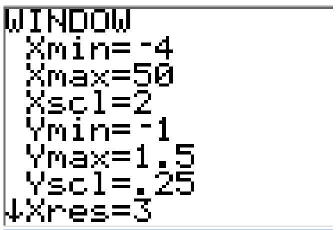
Maximale Temperaturänderung:

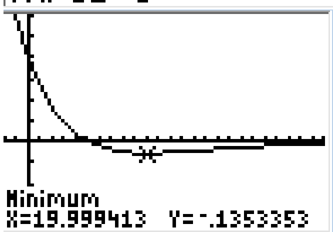
$f'(t)_{max} \overset{GTR}{\approx} 1$ für $t \overset{GTR}{\approx} 0$

$f'(t)_{min} \overset{GTR}{\approx} -0{,}1353$ für $t \overset{GTR}{\approx} 19{,}9994$

Die Krankheit nimmt am stärksten bei Beginn der Krankheit zu und nimmt 20 Stunden danach am stärksten ab.

Neues WINDOW





Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2009 BW

b) *Körpertemperatur unter* $37\,°C$:

$f(t) \cap y = 37$

$t \overset{\text{GTR}}{\approx} 44{,}998$

Etwa 45 *Stunden nach Ausbruch der Krankheit sinkt die Körpertemperatur wieder unter* $37\,°C$.

Nachweis der Dauerhaftigkeit:

$f'(t) = e^{-0{,}1t} - 0{,}1t \cdot e^{-0{,}1t} = (1 - 0{,}1t) \cdot e^{-0{,}1t}$

$f'(t) < 0$ für $t > 10$

Für $t > 10$ ist $f(t)$ monton fallend.

Nach 45 *Stunden bleibt die Temperatur dauerhaft unter* $37\,°C$.

Mittlere Körpertemperatur:

$\frac{1}{45} \cdot \int_0^{45} f(t)\,dt \overset{\text{GTR}}{\approx} 38{,}5864$

Die mittlere Körpertemperatur in den ersten 45 *Stunden der Krankheit beträgt ca.* $38{,}6\,°C$.

2-Stunden-Zeitraum:

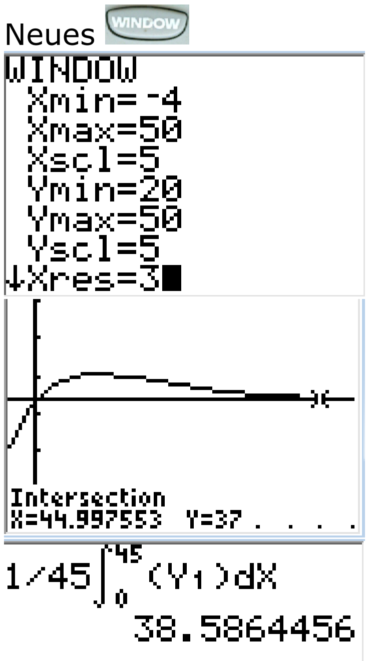
$d(t) = f(t+2) - f(t)$

$d(t) \cap y = 1$

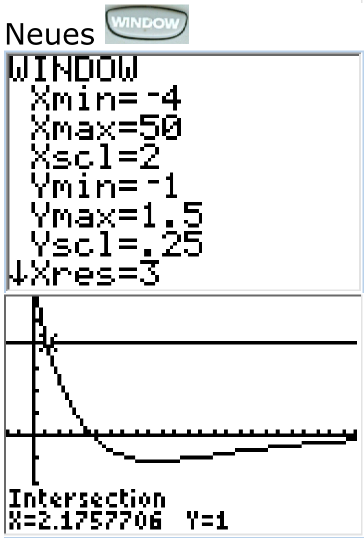
$t \overset{\text{GTR}}{\approx} 2{,}1758$

Im Zeitraum zwischen $2{,}2$ *Stunden und* $4{,}2$ *Stunden nach Krankheitsausbruch nimmt die Körpertemperatur um ein Grad zu.*

Neues



Neues



c) *Temperaturverlauf nach Einnahme des Medikamentes.*

Funktionsgleichung für beschränkten Zerfall:

$g(t) = S + a \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $t \geq 0$, $g(t)$ in $°C$.

Gegeben:

$S = 36{,}5$ (normale Körpertemperatur als Schranke)

$g(0) = f(5) \overset{\text{GTR}}{\approx} 39{,}5$

$g(2) = 38{,}4$

$39{,}5 = 36{,}5 + a \cdot e^{-k \cdot 0} \Longrightarrow a = 3$

$38{,}4 = 36{,}5 + 3 \cdot e^{-2k}$

$\frac{19}{30} = e^{-2k} \quad | \quad ln$

$-2k = ln\left(\frac{19}{30}\right) \Longrightarrow k \approx 0{,}228$

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2009 BW

Der Temperaturverlauf nach Einnahme des Medikamentes wird durch die Funktion g mit $g(t) = 36{,}5 + 3 \cdot e^{-0{,}228 \cdot t}$ beschrieben.
Temperatur ohne und mit Medikament:

$d(t) = f(t+5) - g(t)$
$d(t) \cap 1$
$t_1 \overset{\text{GTR}}{\approx} 1{,}127; \qquad t_2 \overset{\text{GTR}}{\approx} 30{,}729$

Etwa 1,1 *Stunden nach Einnahme des Medikaments ist die Körpertemperatur erstmals um ein Grad niedriger, als sie ohne Medikament wäre.*

Neues WINDOW