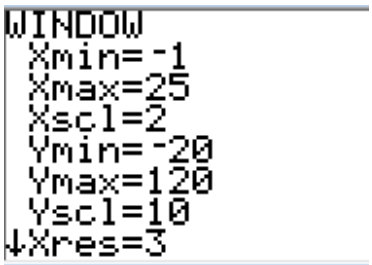
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2013 BW

Lösung A1.1

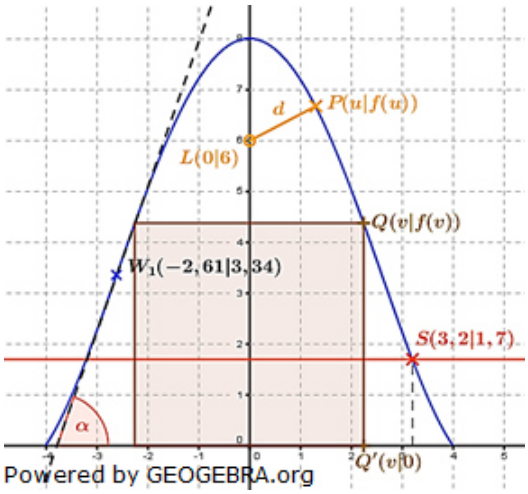
Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1=$.02X^4 - .82x^2 + 8$
Y2=$\frac{d}{dX}(Y1)|_{X=X}$
Y3=1.7
Y4=$\sqrt{X^2 + (Y1 - 6)^2}$
Y5=$2X$



a) *Steilste Stellen im Stollen:*
Die steilsten Stellen im Stollen liegen in den Wendepunkten von f. Bestimmung über die Extremwerte von $f'(x)$ per GTR.
Winkel dieser Stellen mit der Horizontalen:
Der Winkel, den dieses Stellen mit der Horizontalen ein-schließen, ist der $arctan$ der Funktionswerte $f'(x_{min})$ bzw. $f'(x_{max})$. (Achtung! GTR auf DEGREE)



Wasservolumen nach Wassereinbruch:
Das Volumen ist die Fläche unter der Wasserlinie multipliziert mit der Stollenlänge. Für die Flächenberechnung wird aus Symmetriegründen nur der rechte Teil des Profils betrachtet. Wir benötigen zunächst den Schnittpunkt, den die Wasserlinie $y = 1{,}7$ mit dem Graphen von f bildet. Die halbe Fläche unter der Wasserlinie ist dann gleich dem Integral unter f im Intervall $[0; 4]$ abzüglich der Fläche zwischen f als oberer Kurve und $y = 1{,}7$ als unterer Kurve im Intervall $[0; x_S]$.

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes einer Lampe in $6\,m$ Höhe:*
Position der Lampe ist $L(0|6)$. Gesucht wird der Punkt auf f mit den Koordinaten $P(u|f(u))$, der den kleinsten Abstand zu L hat.
Wir bilden die Abstandsfunktion Punkt/Punkt mit $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, und bestimmen deren Minimum mit dem GTR.

c) *Würfelförmiger Behälter:*
Gesucht sind die Seitenlängen eines Quadrates, welches unter f einbeschrieben ist. Aus Symmetriegründen gilt hier (siehe Grafik) $f(v) = 2v$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2013 BW

Klausuraufschrieb

a) *Steilste Stellen im Stollen:*

$f'(x)_{max} \overset{GTR}{\approx} 2{,}858$ für $x_0 \overset{GTR}{\approx} -2{,}61$

$f'(x)_{min} \overset{GTR}{\approx} -2{,}858$ für $x_0 \overset{GTR}{\approx} 2{,}61$

$f(-2{,}61) = f(2{,}61) \overset{GTR}{\approx} 3{,}34$

Die steilsten Stellen liegen in den Punkten $W_1(-2{,}61|3{,}34)$ *und* $W_2(2{,}61|3{,}34)$.

Winkel dieser Stellen mit der Horizontalen:

$f'(x)_{max} = 2{,}858 = tan\alpha$

$\alpha = arctan(2{,}858) = 70{,}7153°$

Der Winkel an diesen Stellen zur Horizontalen beträgt etwa $70{,}7\,°$.

Wasservolumen nach Wassereinbruch:

$f(x) \cap y = 1{,}7$

$x_1 \overset{GTR}{=} -3{,}2$ $\qquad$ $x_2 \overset{GTR}{=} 3{,}2$

Wegen Achsensymmetrie Berechnung von $\frac{A}{2}$.

$\frac{A}{2} = \int_0^4 f(x)\,dx - \int_0^{3,2}(f(x) - 1{,}7)dx \overset{GTR}{\approx} 6.06$

$A = 12{,}12$

$V = A \cdot l = 12{,}12 \cdot 50 = 606$

Im Stollen befinden sich etwa $606\,m^3$ *Wasser.*

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes einer Lampe in* $6\,m$ *Höhe:*

Position Lampe: $L(0|6)$

Punkt auf f: $P(u|f(u))$

$d(u) = \sqrt{(u-0)^2 + (f(u)-6)^2}$

$d(u)_{min} \overset{GTR}{\approx} 1{,}46$ für $u \overset{GTR}{\approx} 1{,}303$

Der kleinste Abstand von den Wänden beträgt etwa $1{,}46\,m$. *Der Sicherheitsabstand wird eingehalten.*

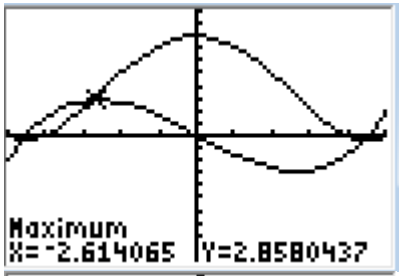
c) Würfelförmiger Behälter:

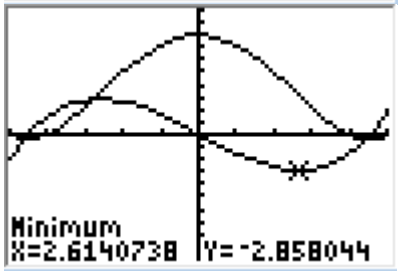
Es gilt: $f(v) = 2v$ (siehe Grafik)

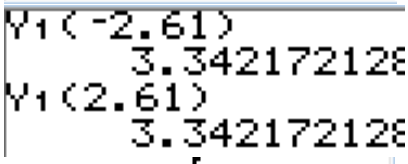
$f(v) \cap y = 2v$

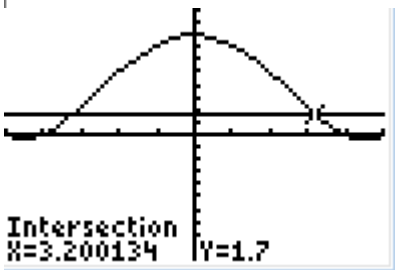
$v \overset{GTR}{\approx} 2{,}22$

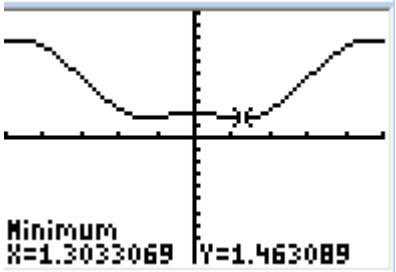
Der Behälter darf höchstens $4{,}4\,m$ *breit sein.*

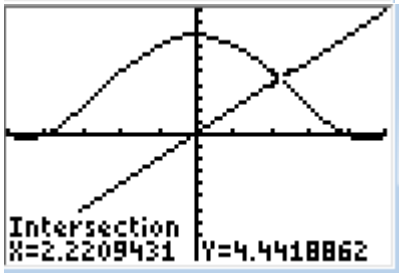












© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2013 BW

Lösung A1.2

Lösungslogik

Infolge des Parameters t ist hier der Einsatz des GTR nicht möglich.
Durch konsequente Anwendung des Satzes vom Nullprodukt kommen wir zur Lösung.

Klausuraufschrieb

Satz vom Nullprodukt:

(1) $(x-1)=0$ $\qquad$ $f_t(x)$ hat stets die Nullstelle $x_1=1$.

(2) $\left(1-\frac{1}{t}\cdot e^x\right)=0$

$\frac{1}{t}\cdot e^x=1$

$e^x=t$ $\qquad$ | $\quad ln$

$x_2=ln(t)$

Sonderfall $t=e$:

Wegen $ln(e)=1$ besitzt $f_t(x)$ für $t=e$ auch nur eine Nullstelle.

$t<0$

Da $x_2=ln(t)$ für $t<0$ keine Lösung hat, besitzt $f_t(x)$ für $t<0$ auch nur eine Nullstelle. Daraus folgt:

Für $t\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{e\}$ besitzt $f_t(x)$ zwei Nullstellen.

Aufgabe 2.1

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1=$10000(e^{-.5X}-e^{-X})$

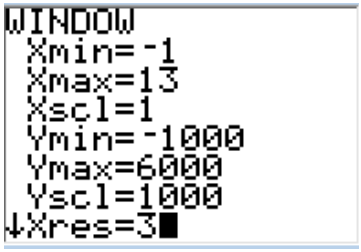
Y2=$\frac{d}{dX}(Y1)|_{X=X}$

Y3=2000

Y4=$\int_0^X(Y1)dX$

Y5=5000

Y6=$Y1-400$

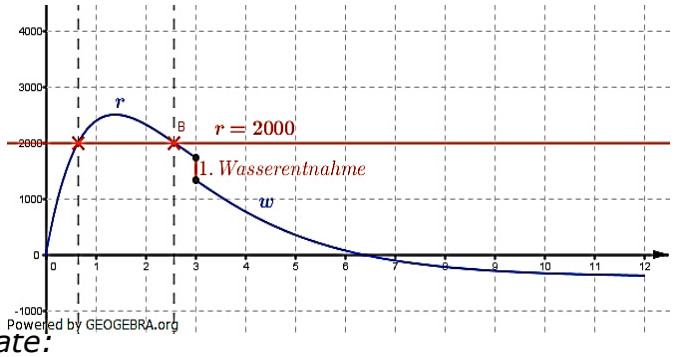


a) *Maximale momentane Zuflussrate:*

Maximum von $r(t)$ per GTR.

Zuflussrate größer $2000\frac{ltr}{h}$*:*

Wir bestimmen die Schnittpunkte von $r(t)$ mit der Parallelen zur t–Achse im Abstand 2000 per GTR.



Stärkste Abnahme der Zuflussrate:

Wir bestimmen den Wendepunkt mit negativer Steigung von $r(t)$ über das Extremum von $r'(t)$ per GTR.

b) *Wasserstand nach drei Stunden:*

Dies ist die Fläche unter $r(t)$ im Intervall $[0;3]$.

Zeitpunkt für $5000\ ltr$ im Tank:
Wir bestimmen den Schnittpunkt der Stammfunktion $R(t)$ mit einer Parallelen zur t–Achse im Abstand 5000 mit dem GTR.

c) *Wasserentnahme in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn:*
Der neuen Gleichung $w(t)$ entnehmen wir, dass stündlich $400\ ltr$ Wasser entnommen werden. Da die Wasserentnahme erst drei Stunden nach Regenbeginn beginnt, wird also 9 Stunden lang Wasser entnommen.
Zeitpunkt der Abnahme der Wassermenge:
Die Wassermenge nimmt ab dem Zeitpunkt ab, ab dem $w(t)$ negativ wird, also in der Nullstelle von $w(t)$.
Maximale Wassermenge im Tank:
Bis 3 Stunden nach Regenbeginn und vor der ersten Wasserentnahme befinden sich etwa $6035\ ltr$ im Tank (siehe Teilaufgabe a)). Die Wassermenge nimmt zu bis zum Zeitpunkt bei $w(t) = 0$, also bis $t = 6{,}35$ (siehe Aufgabenteil zuvor). Die maximale Wassermenge im Tank entspricht somit der Fläche unter r im Intervall $[0; 3]$ zuzüglich der Fläche unter w im Intervall $[3; 6{,}35]$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) *Maximale momentane Zuflussrate:*

$r(t)_{max} \overset{GTR}{=} 2500$ für $t \overset{GTR}{\approx} 1{,}386$

Die maximale momentane Zuflussrate beträgt $2500\frac{ltr}{h}$.

Zuflussrate größer $2000\frac{ltr}{h}$*:*

$r(t) \cap r = 2000$

$t_1 \overset{GTR}{\approx} 0{,}647 \qquad t_2 \overset{GTR}{\approx} 2{,}572$

Zwischen etwa $40\ min$ und $2\ h\ 30\ min$ nach Regenbeginn ist die Zuflussrate größer als $2000\frac{ltr}{h}$.

Stärkste Abnahme der Zuflussrate:

$r'(t)_{min} \overset{GTR}{=} -625$ für $t \overset{GTR}{\approx} 2{,}773$

Etwa $2\ h\ 48\ min$ nach Regenbeginn nimmt die Zuflussrate am stärksten ab.

Wassermenge nach drei Stunden:

$V = \int_0^3 r(t)\,dt \overset{GTR}{\approx} 6035{,}27$

Die Wassermenge nach 3 Stunden beträgt etwa $6035\ ltr$.

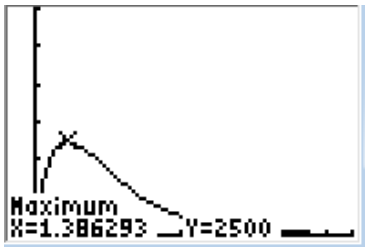
Zeitpunkt für $5000\ ltr$ im Tank:

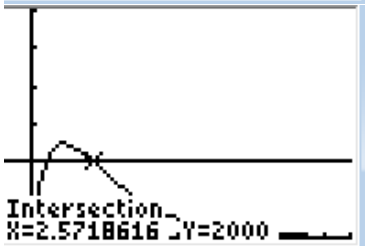
$R(t) \cap R = 5000$

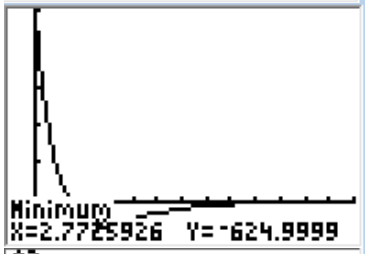
$5000 = \int_0^t r(t)\,dt$

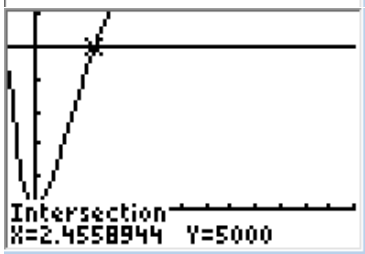
$t \overset{GTR}{\approx} 2{,}456$

Etwa $2\ h\ 30\ min$ nach Regenbeginn befinden sich $5000\ ltr$ im Tank.

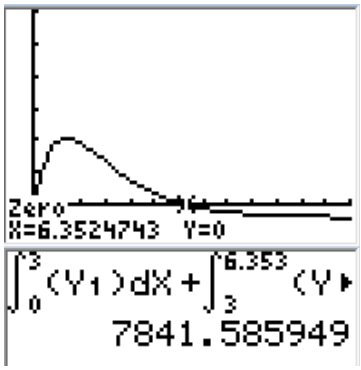








c) *Wasserentnahme in den ersten* 12 *Stunden nach Regenbeginn:*
Gemäß $w(t)$ werden stündlich $400\ ltr$ Wasser entnommen von 3 Stunden bis 12 Stunden nach Regenbeginn.
$W = 9 \cdot 400 = 3600$
In den ersten 12 *Stunden nach Regenbeginn werden* $3600\ ltr$ *Wasser entnommen.*
Zeitpunkt der Abnahme der Wassermenge:
$w(t) = 0$
$t \overset{\text{GTR}}{\approx} 6{,}3525$
Etwa $6\ h\ 21\ min$ *nach Regenbeginn nimmt die Wassermenge ab.*
Maximale Wassermenge im Tank:
$W = \int_0^3 r(t)\,dt + \int_3^{6{,}353} w(t)\,dt \overset{\text{GTR}}{\approx} 7841{,}586$
Die maximale Wassermenge im Tank ist etwa $7842\ ltr$.



Lösung A2.2

Lösungslogik

Wegen der Forderung „Berechnen Sie exakt" ist für diese Aufgabe die Verwendung des GTR nicht möglich.

Fläche A_f *exakt:*

Wir bilden das Integral von $f(x)$ im Intervall $[0;1]$.

Ganzrationale Funktion zweiten Grades mit halber Fläche:

Die ganzrationale Funktion zweiten Grades ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den gegebenen Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Wir stellen die Funktionsgleichung der Parabel $p(x)$ über die Nullstellenform auf mit zunächst noch unbekanntem Streckungsfaktor a in y–Richtung. Über das Integral von $p(x)$ im Intervall $[0;1]$ und der Fläche $A_P = \frac{1}{2}A_f$ lässt sich dann a bestimmen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2013 BW

Klausuraufschrieb

Fläche A_f exakt:

$$A_f = \int_0^1 sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cdot cos(\pi x)\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$$

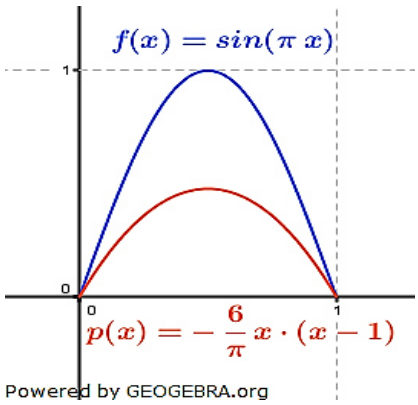
Die Fläche unter f im Intervall $[0;1]$ beträgt $\frac{1}{\pi}$ FE.

Ganzrationale Funktion zweiten Grades mit halber Fläche:

$$p(x) = ax\cdot(x-1) = ax^2 - ax$$

$$A_P = \frac{2}{2\pi} = a\cdot\int_0^1 (x^2 - x)\,dx = a\cdot\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = a\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}a$$

$$\frac{1}{\pi} = -\frac{1}{6}a \implies a = -\frac{6}{\pi}$$

Die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades mit einer Fläche halb so groß wie die Fläche unter f im Intervall $[0;1]$ lautet:

$$p(x) = -\frac{6}{\pi}x\cdot(x-1)$$