Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

Aufgabe A1

Der Laderaum eines Lastkahns ist $50\,m$ lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird modellhaft beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{125}x^4;\ -5 \leq x \leq 5 \quad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

a) Wie tief ist der Laderaum in der Mitte?
Wie breit ist er in $3\,m$ Höhe?
In welchem Bereich hat der Boden des Laderaums eine Neigung unter $5\,\%$?
Berechnen Sie das Volumen des Laderaums.

b) Zur Wartung steht der Lastkahn auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte im Modell durch die Punkte $P_1\big(-4\big|f(-4)\big)$ und $P_2\big(4\big|f(4)\big)$, beschrieben werden.
In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform.

c) Der Laderaum kann durch eine horizontale Zwischendecke der Länge $50\,m$ in zwei Teilräume geteilt werden. Das Volumen des unteren Teilraums beträgt $500\,m^3$.
Berechnen Sie die Breite des Zwischendecks.

d) Untersuchen Sie, ob sich eine zylinderförmige Röhre mit Außendurchmesser $9{,}8\,m$ so in Längsrichtung in den Laderaum legen lässt, dass sie ihn an der tiefsten Stelle berührt.

Aufgabe A 2.1

Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 läss sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.
Die Funktion g mit $g(t) = 400 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t}$ beschreibt die Geburtenrate und die Funktion s mit $s(t) = 600 + 10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}$ beschreibt die Sterberate der Population (t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960, $g(t)$ und $s(t)$ in Individuen pro Jahr).

a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate.
In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten?
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat.

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus $20\,000$ Individuen.
Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017.
In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960?

Betrachtet wird nun das Größenwachstum eines einzelnen Individuums der Population. Dies kann im Beobachtungszeitraum durch das Gesetz des beschränkten Wachstums modelliert werden. Man geht davon aus, dass dieses Individuum im ausgewachsenen Zustand $0{,}8\,m$ groß ist. Zu Beobachtungsbeginn betragen seine Größe $0{,}5\,m$ und seine momentene Wachstumsgeschwindigkeit $0{,}15\,m$ pro Jahr.

c) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion, die die Körpergröße des Individuums in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um $50\,\%$ zugenommen?

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

Aufgabe A 2.2

Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt $O(0|0)$ und die Funktion f mit $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte des Kreises mit dem Graphen von f in Abhängigkeit vom Kreisradius.

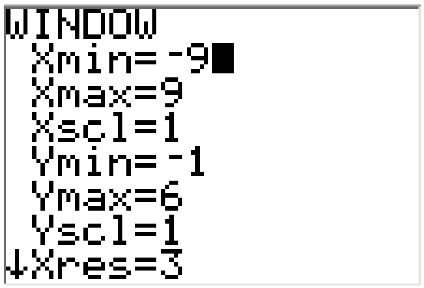
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

Lösung A1

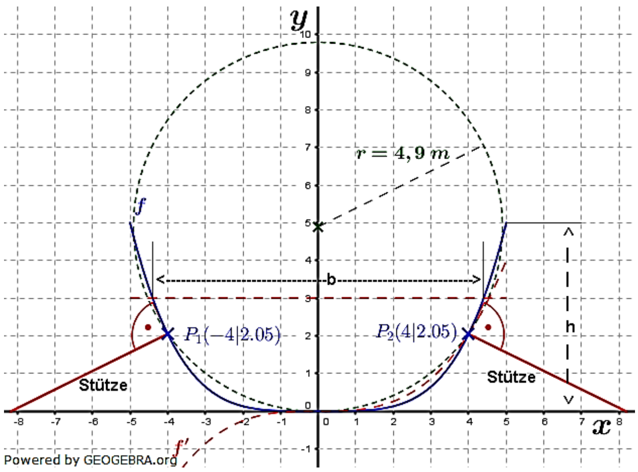
Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1$=1/125X^4$
Y2$=\frac{d}{dX}(Y1)|_{X=X}$
Y3$=3$
Y4$=0{,}05$
Y5$=-1/Y2(2)*(X-2)+Y1(2)$
Y6$=\sqrt{X^2+(Y1-4{,}9)^2}$



a) *Tiefe des Laderaums in der Mitte:*
Dies ist der Funktionswert $f(5)$
Breite in $3\,m$ Höhe:
Dies ist die Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten von mit der Parallelen zur x–Achse im Abstand 3, also $y=3$.
Neigung unter $5\,\%$:
Dies ist das Intervall, in dem $f'(x)<0{,}05$ ist. Es genügt die Berechnung der rechten Profilseite, der sich daraus ergebende x–Wert ist für die linke Profilseite negativ.



Volumen des Laderaums:
Dies ist das Integral zwischen oberer Kurve (Parallele zur x–Achse im Abstand $f(5)$) und unterer Kurve $f(x)$ multipliziert mit der Länge $50\,m$.

b) *Abstand der Stützenenden auf der Plattform:*
Die Stützen sind orthogonal zur Außenwand angebracht, stehen also senkrecht auf der Tangente in den Befestigungspunkten. Wegen der Symmetrie braucht nur eine Hälfte untersucht zu werden. Der Abstand der Stützen auf der Plattform ist also zwei Mal dem Nullstellenwert der Normalen durch den Punkt $P_2(4|f(4))$.

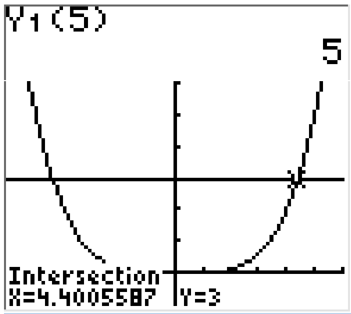
c) *Breite des Zwischendecks:*
Das Volumen des unteren Teilraumes ist mit $500\,m^3$ gegeben. Dies entspricht (bei $50\,m$ Kahnlänge) einer Querschnittsfläche von $10\,m^2$. Aus Symmetriegründen wird nur die rechte Hälfte mit somit $5\,m^2$ betrachtet. Es gibt einen Punkt $P(u|f(u))$, für den das Integral im Intervall $[0;u]$ aus oberer Kurve (parallele zur x–Achse im Abstand $f(u)$) und unterer Kurve f den Wert 5 ergibt.

d) *Zylinderförmige Röhre:*
Wenn die Röhre den Boden berühren soll, muss sie ihren Mittelpunkt in $M(0|4{,}9)$ haben. Ist der kürzeste Abstand von M zu f größer oder gleich dem Radius $r=4{,}9$ der Röhre, so lässt sich die Röhre in den Laderaum legen, wie beschrieben, ist dieser Abstand kleiner als der Radius, lässt sie sich nicht in den Laderaum legen, sodass sie auf dem Boden aufliegt.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

Klausuraufschrieb

a) *Tiefe des Laderaums in der Mitte:*



$f(5) \overset{\text{GTR}}{=} 5$

Der Laderaum ist insgesamt $5\,m$ *hoch.*

Breite in $3\,m$ *Höhe:*

$g\colon\ y = 3$

$g \cap f$

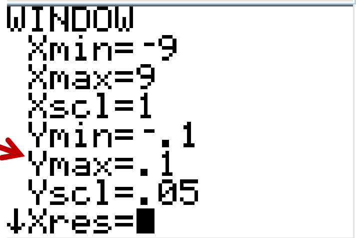
$x_1 \overset{\text{GTR}}{=} -4{,}4 \qquad x_2 \overset{\text{GTR}}{=} 4{,}4$

Der Laderaum ist in $3\,m$ *Höhe* $8{,}80\,m$ *breit.*

Bereich für Neigung zum Boden unter $5\,\%$*:*

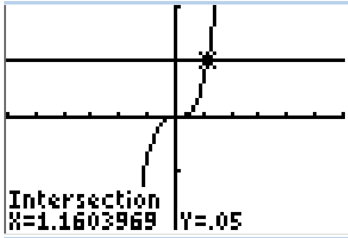
$f'(x) < 0{,}05.$

$g\colon\ y = 0{,}05$ (Anpassung erforderlich)



$g \cap f'$

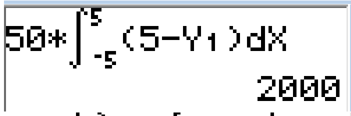
$x_1 \overset{\text{GTR}}{=} -1{,}16 \qquad x_2 \overset{\text{GTR}}{=} 1{,}16$



Im Bereich $-1{,}16 < x < 1{,}16$ *ist die Neigung zum Boden unter* $5\,\%$*.*

Volumen des Laderaums:

$V = 50 \cdot \int_{-5}^{5} (5 - f(x))\,dx \overset{\text{GTR}}{=} 2000$



Das Volumen des Laderaums beträgt $2000\,m^3$.

b) *Abstand der Stützenden am Boden:*

Aus Symmetriegründen nur Betrachtung der rechten Profilseite.

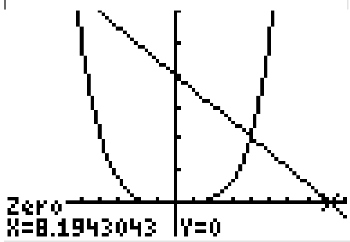
$P_2(4|2{,}05)$

Gleichung der Normalen an f durch P_2:

$n(x) = -\frac{1}{f'(4)} \cdot (x - 4) + f(4)$

Nullstelle von n:

$n(x) = 0 \implies x \overset{\text{GTR}}{\approx} 8{,}2$



Der Abstand der beiden Stützen am Boden beträgt etwa $16{,}4\,m$*.*

c) *Breite des Zwischendecks*:

Das Volumen des unteren Teilraums ist $500\,m^3$. Bei $50\,m$ Kahnlänge entspricht dies einer Grundfläche von $10\,m^2$. Aus Symmetriegründen wird nur die rechte Profilseite betrachte, also nur $5\,m^2$.

Ein Punkt auf f sei $P(u|f(u))$, dann gilt:

$5 = \int_0^u (f(u) - f(x))\,dx$

$\left[\frac{1}{125}u^4 \cdot x - \frac{1}{125 \cdot 5}x^5\right]_0^u = 5$

$\frac{1}{125}u^5 - \frac{1}{625}u^5 = 5$

$\frac{4}{625}u^5 = 5 \implies u^5 = 781{,}25 \implies u \overset{\text{GTR}}{\approx} 3{,}8$

Die Breite des Zwischendecks beträgt etwa $7{,}6\,m$.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

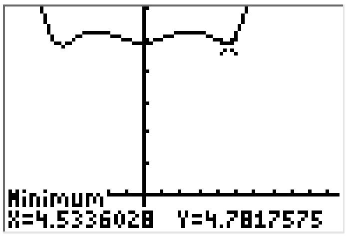
d) *Zylinderförmige Röhre:*

$M_{Röhre}(0|4{,}9)$; $P(u|f(u))$

Strecke $\overline{M_{Röhre}P}$:

$d(u) = \sqrt{u^2 + (f(u) - 4{,}9)^2}$ (im Y6-Speicher)

$d(u)_{min} 4{,}78$ für $u = 4{,}534$



Der kürzeste Abstand von M zum Graphen von f beträgt etwa $4{,}8\,m$.

Die Röhre lässt sich nicht in den Laderaum legen, sodass sie ihn an der tiefsten Stelle berührt.

Lösung A2.1

Lösungslogik

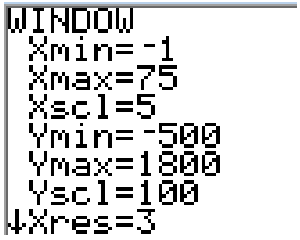
GTR-Einstellungen:

Y1$=400 + 20 * (X + 1)^2 * e^{-0.1X}$

Y2$=600 + 10 * (X - 6)^2 * e^{-0.09X}$

Y3$=Y1 - Y2$

Y4$=\int_0^x Y3\,dx$



a) *Geringste Sterberate:*

$s(t)_{min}$ per GTR.

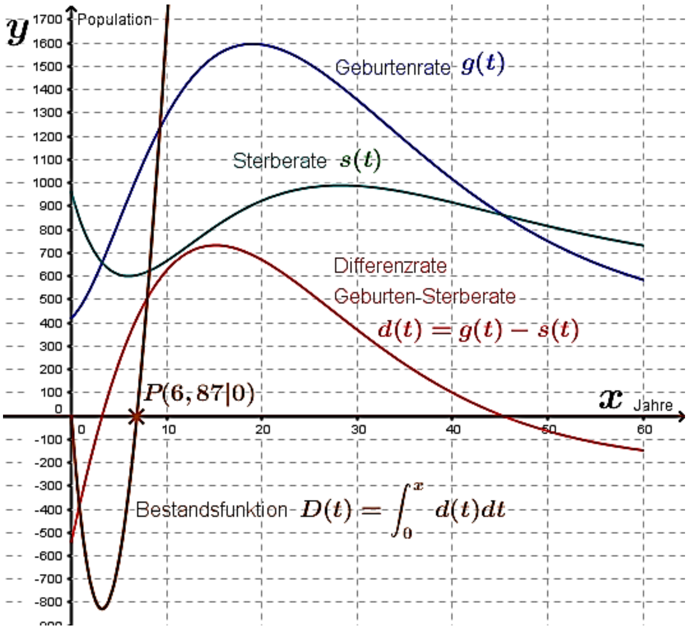
Differenz aus Geburten- und Sterberate:

$d(t) = g(t) - s(t)$

$d(t)_{max}$ per GTR

Zeitraum der Zuname:

$d(t) > 0$, Bestimmung der Nullstellen von $d(t)$ per GTR.



b) *Bestand der Population zu Beginn des Jahres* 2017*:*

g und s sind als Änderungsraten definiert. Somit ist auch die Differenzfunktion d eine Funktion der Änderungsrate. Das Integral unter d im Intervall von 1960 bis 2016, also $I = [0; 56]$, gibt somit die hinzukommenden bzw. abnehmenden Individuen an. Dieser Zahl ist der Anfangsbestand von $20\,000$ Individuen hinzuzuaddieren.

Jahr, in dem die Population erstmals wieder den Bestand von 1960 *erreicht:*

Wir bilden per GTR die Bestandsfunktion $D(t)$ über das Integral der Differenzfunktion $d(t)$ im Intervall $I = [0; x]$. Die erste Nullstelle ergibt den gesuchten t –Wert.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

c) *Funktionsgleichung für die Körpergröße in Abhängigkeit der Zeit:*
Die Funktionsgleichung für beschränktes Wachstum lautet $B(t) = S - a \cdot e^{-kt}$ mit S als oberer Schranke, a mit oberer Schranke minus Anfangsbestand (a=$S - B(0)$) und k als Wachstumsfaktor. $B(0)$ ist mit $0{,}5\,m$ gegben. S ist mit $0{,}8\,m$ gegeben. Somit ist $a = 0{,}3$. Die Wachstumsrate zu Beobachtungsbeginn beträgt $0{,}15\,m$/Jahr. Damit ist $B'(0) = 0{,}15$. Über diese Bedingung lässt sich dann der Wert von k ermitteln und damit die vollständige Funktionsgleichung.
Jahre für Zunahme der Körpergröße um $50\,\%$*:*
Gesucht ist t für $B(t) = 0{,}75\,m$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) *Geringste Sterberate:*

$s(t)_{min} \overset{GTR}{=} 600$ für $t \overset{GTR}{=} 6$

Die geringste Sterberate ist 600 *Individuen/Jahr.*

Differenz aus Geburten- und Sterberate:

$d(t) = g(t) - s(t)$

$d(t)_{max} \overset{GTR}{\approx} 732{,}5$ für $t \overset{GTR}{\approx} 15{,}12$

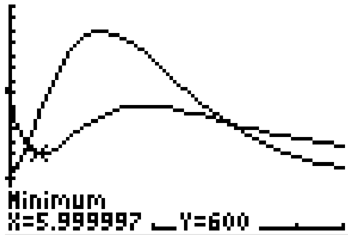
Die Differenz aus Geburten- und Sterberate ist im Jahre 1976 am größten.

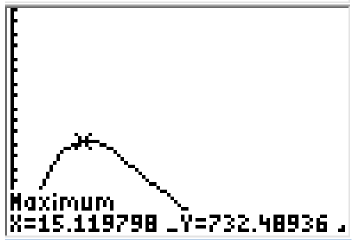
Zeitraum der Zuname:

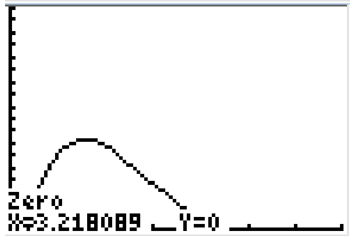
$d(t) > 0$:

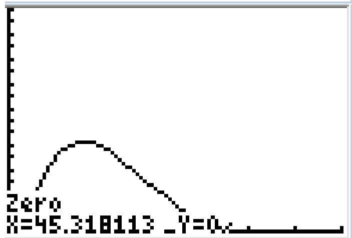
$t_1 \overset{GTR}{\approx} 3{,}22; \quad t_2 \overset{GTR}{\approx} 45{,}32$

Die Population nimmt von 1964 *bis* 2005 *zu.*









b) *Jahr, in dem die Population erstmals wieder den Bestand von* 1960 *erreicht:*

$D(t) = 20000 + \int_0^x d(t)\,dt$

$g\colon\ y = 20000$ (Anpassung erforderlich)

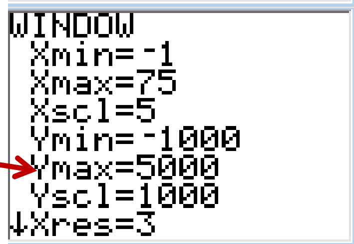
$g \cap D$:

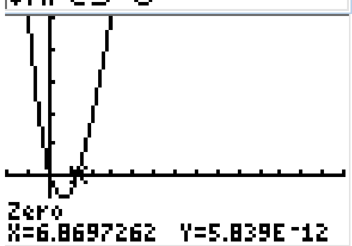
$20000 = 20000 + \int_0^x d(t)\,dt \Longrightarrow$

$\int_0^x d(t)\,dt = 0$

$t_1 \overset{GTR}{\approx} 6{,}87$

Etwa gegen Ende des Jahres 1966 *erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von* 1960.





Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

c) *Funktionsgleichung für die Körpergröße in Abhängigkeit der Zeit:*

$B(t) = S - a \cdot e^{-kt}$

$S = 0{,}8;\ \ B(0) = 0{,}5;\ \ a = S - B(0) = 0{,}3 \quad |\quad$ Werte gegeben

$B'(0) = 0{,}15 \quad |\quad$ Wert gegeben

$B(t) = 0{,}8 - 0{,}3 \cdot e^{-kt}$

$B'(t) = 0{,}3k \cdot e^{-kt}$

$0{,}15 = 0{,}3k \cdot e^{0} = 0{,}3k \quad |\quad :0{,}3$

$k = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5$

$B(t) = 0{,}8 - 0{,}3 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$

Jahre für Zunahme der Körpergröße um $50\,\%$*:*

$B(t) = 0{,}75 = 0{,}8 - 0{,}3 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t} \quad |\quad -0{,}8;\ :-0{,}3$

$0{,}166667 = e^{-0{,}5 \cdot t} \quad |\quad ln$

$-0{,}5 \cdot t = ln(0{,}166667) \quad |\quad :-0{,}5$

$t \overset{\text{GTR}}{\approx} 3{,}5835$

Etwa $3{,}6$ *Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um* $50\,\%$ *zugenommen.*

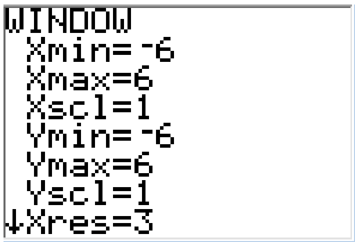
Lösung A2.2

Klausuraufschrieb

GTR-Einstellungen:

Y1=$4/(X^2+1)$

Y2=$\sqrt{X^2+Y1^2}$



Anzahl gemeinsamer Punkte von f mit einem Kreis in Abhängigkeit von r:

Wie aus nebenstehender Grafik ersichtlich, gibt es die Zustände

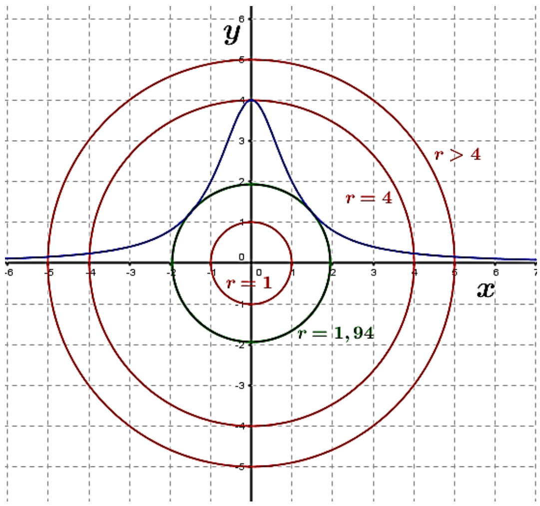
a) keine gemeinsamen Punkte

b) Zwei gemeinsame Punkte

c) Drei gemeinsame Punkte und

d) Vier gemeinsame Punkte.

Eine Grenze vom Wechsel von keinem gemeinsamen Punkt auf zwei gemeinsame Punkte ist die, dass der Kreis den Graphen von f in zwei Punkten berührt.



Es gibt einen Punkt $P(u|f(u))$ auf f, der zum Ursprung den kleinsten Abstand hat. Kleinster Abstand bedeutet, dass die Verbindungsstrecke zwischen dem Ursprung und dem Punkt P auf der Tangente an f in P senkrecht steht. Hat der Kreis nun diesen Abstand als Radius, so berührt er den Graphen von f in P. Wegen der Symmetrie hat der Kreis dann zwei gemeinsame Punkte mit f.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

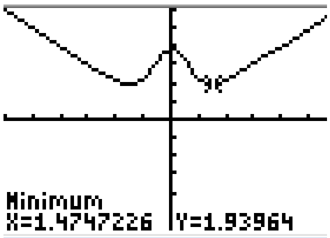
<u>Klausuraufschrieb</u>

Anzahl gemeinsamer Punkte von f mit einem Kreis in Abhängigkeit von r:

Abstand Punkt $P(u|f(u))$ auf f zum Ursprung $O(0|0)$.

$d(u) = \sqrt{u^2 + f(u)^2}$

$d(u)_{min} \overset{\text{GTR}}{\approx} 1{,}94$ für $u \overset{\text{GTR}}{\approx} 1{,}47$



Keine gemeinsamen Punkte für $0 < r < 1{,}94$.

Zwei gemeinsame Punkte für $r = 1{,}94 \vee r > 4$.

Drei gemeinsame Punkte für $r = 4$.

Vier gemeinsame Punkte für $1{,}94 < r < 4$.