

Lösung A1
Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

$$Y1 = 1/125X^4$$

$$Y2 = \frac{d}{dx}(Y1)|_{x=x}$$

$$Y3 = 3$$

$$Y4 = 0,05$$

$$Y5 = -1/Y2(2) * (X - 2) + Y1(2)$$

$$Y6 = \sqrt{X^2 + (Y1 - 4,9)^2}$$

```
WINDOW
Xmin=-9
Xmax=9
Xscl=1
Ymin=-1
Ymax=6
Yscl=1
↓Xres=3
```

a) **Tiefe des Laderaums in der Mitte:**

Dies ist der Funktionswert $f(5)$

Breite in 3 m Höhe:

Dies ist die Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten von mit der Parallelen zur x -Achse im Abstand 3, also $y = 3$.

Neigung unter 5 %:

Dies ist das Intervall, in dem $f'(x) < 0,05$ ist. Es genügt die Berechnung der rechten Profelseite, der sich daraus ergebende x -Wert ist für die linke Profelseite negativ.

Volumen des Laderaums:

Dies ist das Integral zwischen oberer Kurve (Parallele zur x -Achse im Abstand $f(5)$) und unterer Kurve $f(x)$ multipliziert mit der Länge 50 m.

b) **Abstand der Stützenenden auf der Plattform:**

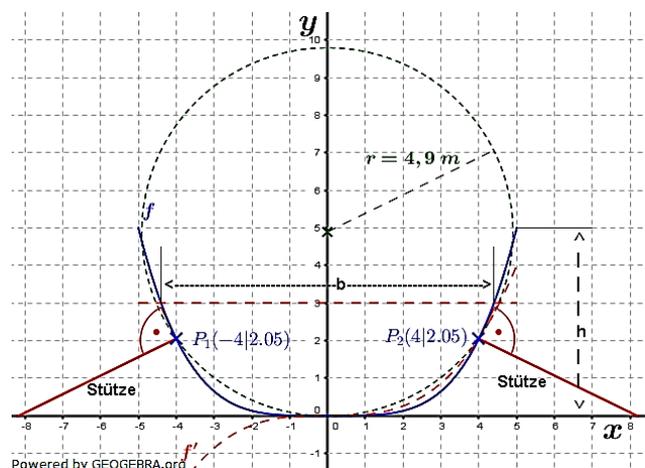
Die Stützen sind orthogonal zur Außenwand angebracht, stehen also senkrecht auf der Tangente in den Befestigungspunkten. Wegen der Symmetrie braucht nur eine Hälfte untersucht zu werden. Der Abstand der Stützen auf der Plattform ist also zwei Mal dem Nullstellenwert der Normalen durch den Punkt $P_2(4|f(4))$.

c) **Breite des Zwischendecks:**

Das Volumen des unteren Teilraumes ist mit 500 m^3 gegeben. Dies entspricht (bei 50 m Kahnlänge) einer Querschnittsfläche von 10 m^2 . Aus Symmetriegründen wird nur die rechte Hälfte mit somit 5 m^2 betrachtet. Es gibt einen Punkt $P(u|f(u))$, für den das Integral im Intervall $[0; u]$ aus oberer Kurve (parallele zur x -Achse im Abstand $f(u)$) und unterer Kurve f den Wert 5 ergibt.

d) **Zylinderförmige Röhre:**

Wenn die Röhre den Boden berühren soll, muss sie ihren Mittelpunkt in $M(0|4,9)$ haben. Ist der kürzeste Abstand von M zu f größer oder gleich dem Radius $r = 4,9$ der Röhre, so lässt sich die Röhre in den Laderaum legen, wie beschrieben, ist dieser Abstand kleiner als der Radius, lässt sie sich nicht in den Laderaum legen, sodass sie auf dem Boden aufliegt.



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW
Klausuraufschrieb

a) *Tiefe des Laderaums in der Mitte:*

GTR
 $f(5) = 5$

Der Laderaum ist insgesamt 5 m hoch.

Breite in 3 m Höhe:

$g: y = 3$

$g \cap f$

GTR GTR
 $x_1 = -4,4 \quad x_2 = 4,4$

Der Laderaum ist in 3 m Höhe 8,80 m breit.

Bereich für Neigung zum Boden unter 5%:

$f'(x) < 0,05$.

$g: y = 0,05$ (Anpassung erforderlich)

$g \cap f'$

GTR GTR
 $x_1 = -1,16 \quad x_2 = 1,16$

Im Bereich $-1,16 < x < 1,16$ ist die Neigung zum Boden unter 5%.

Volumen des Laderaums:

GTR
 $V = 50 \cdot \int_{-5}^5 (5 - f(x)) dx = 2000$

Das Volumen des Laderaums beträgt 2000 m^3 .

b) *Abstand der Stützenden am Boden:*

Aus Symmetriegründen nur Betrachtung der rechten Profelseite.

$P_2(4|2,05)$

Gleichung der Normalen an f durch P_2 :

$n(x) = -\frac{1}{f'(4)} \cdot (x - 4) + f(4)$

Nullstelle von n :

GTR
 $n(x) = 0 \Rightarrow x \approx 8,2$

Der Abstand der beiden Stützen am Boden beträgt etwa 16,4 m.

c) *Breite des Zwischendecks:*

Das Volumen des unteren Teilraums ist 500 m^3 . Bei 50 m Kahnlänge entspricht dies einer Grundfläche von 10 m^2 . Aus Symmetriegründen wird nur die rechte Profelseite betrachte, also nur 5 m^2 .

Ein Punkt auf f sei $P(u|f(u))$, dann gilt:

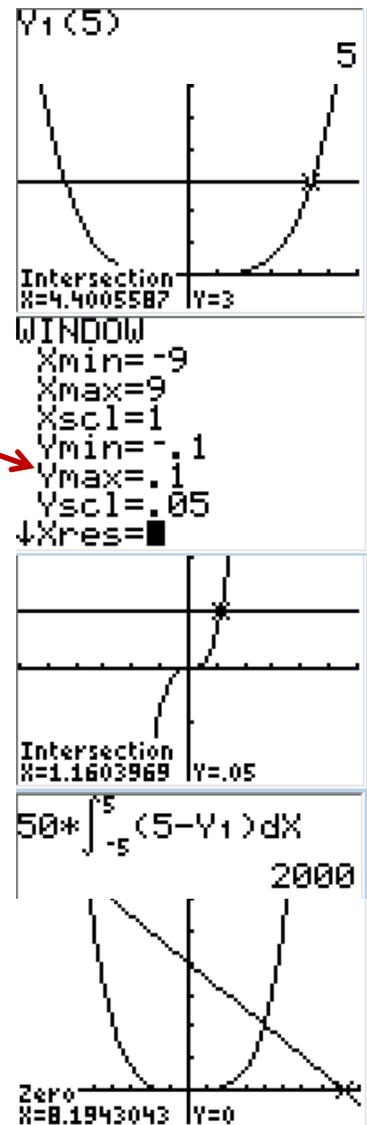
$5 = \int_0^u (f(u) - f(x)) dx$

$\left[\frac{1}{125} u^4 \cdot x - \frac{1}{125 \cdot 5} x^5 \right]_0^u = 5$

$\frac{1}{125} u^5 - \frac{1}{625} u^5 = 5$

GTR
 $\frac{4}{625} u^5 = 5 \Rightarrow u^5 = 781,25 \Rightarrow u \approx 3,8$

Die Breite des Zwischendecks beträgt etwa 7,6 m.



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

d) Zylinderförmige Röhre:

$$M_{\text{Röhre}}(0|4,9); P(u|f(u))$$

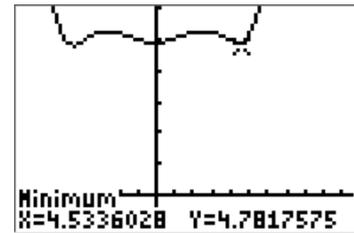
Strecke $\overline{M_{\text{Röhre}}P}$:

$$d(u) = \sqrt{u^2 + (f(u) - 4,9)^2} \quad (\text{im Y6-Speicher})$$

$$d(u)_{\min} 4,78 \quad \text{für } u = 4,534$$

Der kürzeste Abstand von M zum Graphen von f beträgt etwa 4,8 m.

Die Röhre lässt sich nicht in den Laderaum legen, sodass sie ihn an der tiefsten Stelle berührt.



Lösung A2.1

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

$$Y1=400 + 20 * (X + 1)^2 * e^{-0.1X}$$

$$Y2=600 + 10 * (X - 6)^2 * e^{-0.09X}$$

$$Y3=Y1 - Y2$$

$$Y4=\int_0^x Y3 dx$$

```

WINDOW
Xmin=-1
Xmax=75
Xscl=5
Ymin=-500
Ymax=1800
Yscl=100
↓Xres=3
    
```

a) Geringste Sterberate:

$s(t)_{\min}$ per GTR.

Differenz aus Geburten- und Sterberate:

$$d(t) = g(t) - s(t)$$

$d(t)_{\max}$ per GTR

Zeitraum der Zunahme:

$d(t) > 0$, Bestimmung der Nullstellen von $d(t)$ per GTR.

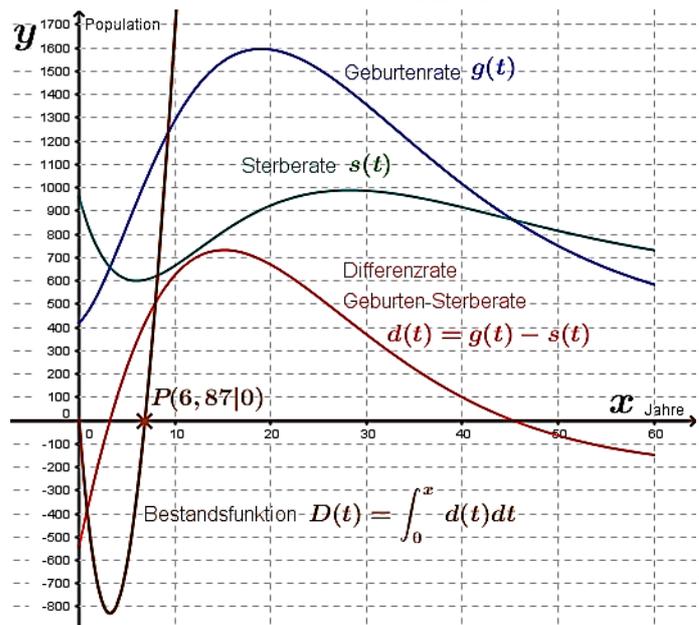
b) Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017:

g und s sind als Änderungs-raten definiert. Somit ist auch die Differenzfunktion d eine Funktion der Änderungsrate. Das Integral unter d im Intervall von 1960 bis 2016, also $I = [0; 56]$, gibt somit die hinzukommenden

bzw. abnehmenden Individuen an. Dieser Zahl ist der Anfangsbestand von 20 000 Individuen hinzuzuaddieren.

Jahr, in dem die Population erstmals wieder den Bestand von 1960 erreicht:

Wir bilden per GTR die Bestandsfunktion $D(t)$ über das Integral der Differenzfunktion $d(t)$ im Intervall $I = [0; x]$. Die erste Nullstelle ergibt den gesuchten t -Wert.



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

- c) Funktionsgleichung für die Körpergröße in Abhängigkeit der Zeit:
 Die Funktionsgleichung für beschränktes Wachstum lautet $B(t) = S - a \cdot e^{-kt}$ mit S als oberer Schranke, a mit oberer Schranke minus Anfangsbestand ($a=S - B(0)$) und k als Wachstumsfaktor. $B(0)$ ist mit $0,5 m$ gegeben. S ist mit $0,8 m$ gegeben. Somit ist $a = 0,3$. Die Wachstumsrate zu Beobachtungsbeginn beträgt $0,15 m/Jahr$. Damit ist $B'(0) = 0,15$. Über diese Bedingung lässt sich dann der Wert von k ermitteln und damit die vollständige Funktionsgleichung.
 Jahre für Zunahme der Körpergröße um 50 %:
 Gesucht ist t für $B(t) = 0,75 m$.

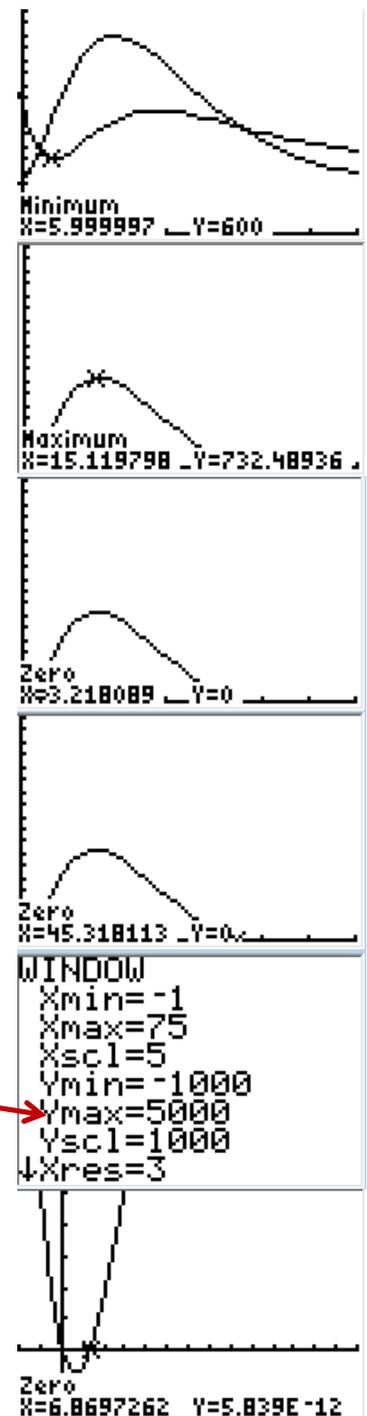
Klausuraufschrieb

- a) Geringste Sterberate:

$s(t)_{min} = 600$ für $t = 6$
 Die geringste Sterberate ist 600 Individuen/Jahr.
 Differenz aus Geburten- und Sterberate:
 $d(t) = g(t) - s(t)$

$d(t)_{max} \approx 732,5$ für $t \approx 15,12$
 Die Differenz aus Geburten- und Sterberate ist im Jahre 1976 am größten.
 Zeitraum der Zunahme:
 $d(t) > 0$:

$t_1 \approx 3,22$; $t_2 \approx 45,32$
 Die Population nimmt von 1964 bis 2005 zu.



- b) Jahr, in dem die Population erstmals wieder den Bestand von 1960 erreicht:

$D(t) = 20000 + \int_0^x d(t) dt$
 $g: y = 20000$ (Anpassung erforderlich)
 $g \cap D$:
 $20000 = 20000 + \int_0^x d(t) dt \Rightarrow$
 $\int_0^x d(t) dt = 0$

$t_1 \approx 6,87$
 Etwa gegen Ende des Jahres 1966 erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

c) Funktionsgleichung für die Körpergröße in Abhängigkeit der Zeit:

$$B(t) = S - a \cdot e^{-kt}$$

$$S = 0,8; B(0) = 0,5; a = S - B(0) = 0,3 \quad | \quad \text{Werte gegeben}$$

$$B'(0) = 0,15 \quad | \quad \text{Wert gegeben}$$

$$B(t) = 0,8 - 0,3 \cdot e^{-kt}$$

$$B'(t) = 0,3k \cdot e^{-kt}$$

$$0,15 = 0,3k \cdot e^0 = 0,3k \quad | \quad : 0,3$$

$$k = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

$$B(t) = 0,8 - 0,3 \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$

Jahre für Zunahme der Körpergröße um 50 %:

$$B(t) = 0,75 = 0,8 - 0,3 \cdot e^{-0,5 \cdot t} \quad | \quad -0,8; : -0,3$$

$$0,166667 = e^{-0,5 \cdot t} \quad | \quad \ln$$

$$-0,5 \cdot t = \ln(0,166667) \quad | \quad : -0,5$$

GTR

$$t \approx 3,5835$$

Etwa 3,6 Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50 % zugenommen.

Lösung A2.2

Klausuraufschrieb

GTR-Einstellungen:

$$Y1 = 4/(X^2 + 1)$$

$$Y2 = \sqrt{X^2 + Y1^2}$$

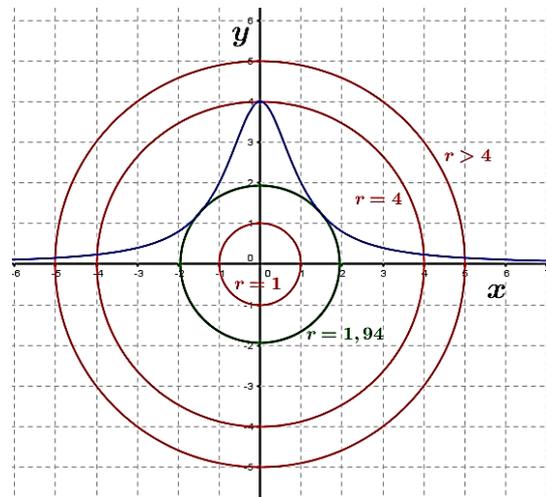
```
WINDOW
Xmin=-6
Xmax=6
Xscl=1
Ymin=-6
Ymax=6
Yscl=1
↓Xres=3
```

Anzahl gemeinsamer Punkte von f mit einem Kreis in Abhängigkeit von r :

Wie aus nebenstehender Grafik ersichtlich, gibt es die Zustände

- keine gemeinsamen Punkte
- Zwei gemeinsame Punkte
- Drei gemeinsame Punkte und
- Vier gemeinsame Punkte.

Eine Grenze vom Wechsel von keinem gemeinsamen Punkt auf zwei gemeinsame Punkte ist die, dass der Kreis den Graphen von f in zwei Punkten berührt.



Es gibt einen Punkt $P(u|f(u))$ auf f , der zum Ursprung den kleinsten Abstand hat. Kleinsten Abstand bedeutet, dass die Verbindungsstrecke zwischen dem Ursprung und dem Punkt P auf der Tangente an f in P senkrecht steht. Hat der Kreis nun diesen Abstand als Radius, so berührt er den Graphen von f in P . Wegen der Symmetrie hat der Kreis dann zwei gemeinsame Punkte mit f .

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2015 BW

Klausuraufschrieb

Anzahl gemeinsamer Punkte von f mit einem Kreis in Abhängigkeit von r :

Abstand Punkt $P(u|f(u))$ auf f zum Ursprung $O(0|0)$.

$$d(u) = \sqrt{u^2 + f(u)^2}$$

$$d(u)_{\min} \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 1,94 \quad \text{für } u \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 1,47$$

Keine gemeinsamen Punkte für $0 < r < 1,94$.

Zwei gemeinsame Punkte für $r = 1,94 \vee r > 4$.

Drei gemeinsame Punkte für $r = 4$.

Vier gemeinsame Punkte für $1,94 < r < 4$.

