



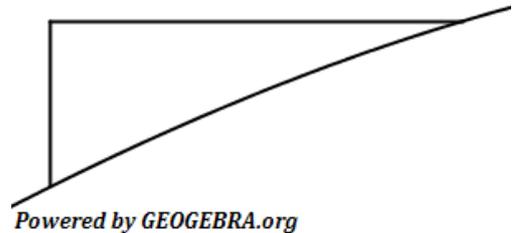
Aufgabe A1.1

Der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,5x^2 + 3,6$$

beschreibt modellhaft für $-1 \leq x \leq 5$ das Profil eines Geländequerschnitts. Die positive x -Achse weist nach Osten, $f(x)$ gibt die Höhe über dem Meeres-spiegel an (1 Längeneinheit entspricht 100 m).

- a) Auf welcher Höhe liegt der höchste Punkt des Profils?
In dem Tal westlich dieses Punktes befindet sich ein See, der im Gelände-querschnitt an einer tiefsten Stelle 10 m tief ist. Bestimmen Sie die Breite des Sees im Geländequerschnitt.
Ab einer Hangneigung von 30° besteht die Gefahr, dass sich Lawinen lösen. Besteht an der steilsten Stelle des Profils zwischen See und höchstem Punkt Lawinengefahr?
- b) Am Hang zwischen dem höchsten Punkt und dem westlich davon gelegenen Tal befindet sich ein in den Hang gebautes Gebäude, dessen rechteckige Seiten-wand im Geländequerschnitt liegt.
Die Abbildung zeigt den sichtbaren Teil dieser Seitenwand. Die Oberkante der Wand verläuft waagrecht auf 540 m Höhe. Von dieser Kante sind 28 m sichtbar.
Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils größer als 130 m^2 ist.
- c) Der weitere Verlauf des Profils nach Osten hin kann durch eine Parabel zweiter Ordnung modelliert werden, die sich ohne Knick an den Graphen von f anschließt. Ihr Scheitel liegt bei $x = 6$ und beschreibt den tiefsten Punkt eines benachbarten Tals.
Auf welcher Höhe befindet sich dieser Punkt?



Powered by GEOGEBRA.org

Aufgabe A1.2

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$, deren Graph symmetrisch zur y -Achse ist.

Es gibt einen Kreis, der den Graphen von h in dessen Schnittpunkt mit der x -Achse berührt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises.

Aufgabe A2.1

In einem Skigebiet beträgt die Schneehöhe um 10:00 Uhr an einer Messstelle 150 cm. Die momentane Änderungsrate dieser Schneehöhe wird beschrieben durch die Funktion s mit

$$s(t) = 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 2; \quad 0 \leq t \leq 12$$

(t in Stunden nach 10:00 Uhr, $s(t)$ in Zentimeter pro Stunde).

- a) Bestimmen Sie die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe. Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate der Schneehöhe größer als 2 cm pro Stunde ist. Wie hoch liegt der Schnee um 12:00 Uhr?
- b) Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t beschreibt. Zu welchen Uhrzeiten beträgt die Schneehöhe 153 cm?
- c) Um 12:30 Uhr werden nun Schneekanonen in Betrieb genommen. Sie liefern konstant so viel Schnee, dass sich die momentane Änderungsrate der Schneehöhe an der Messstelle um 1 cm pro Stunde erhöht. Um wie viele Stunden verlängert sich durch diese Maßnahme der Zeitraum, in dem die Schneehöhe zunimmt? Wie viele Zentimeter Schnee pro Stunde müssten die Schneekanonen ab 12:30 Uhr liefern, damit um 18:00 Uhr die Schneehöhe 160 cm betragen würde?

Aufgabe A2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion g_a gegeben durch

$$g_a(x) = a \cdot \cos(a \cdot x); \quad -\frac{\pi}{2a} \leq x \leq \frac{\pi}{2a}$$

Der Graph von g_a schneidet die y -Achse in einem Punkt. Die Strecke von diesem Punkt zum Ursprung ist die Diagonale einer Raute. Die beiden Eckpunkte der Raute liegen auf dem Graphen von g_a .

- a) Bestimmen Sie für $a = 3$ die Längen der beiden Diagonalen dieser Raute.
- b) Bestimmen Sie den Wert von a , für den die Raute ein Quadrat ist.

Lösung A1.1

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

$$Y1 = -0.1X^3 + .5X^2 + 3.6$$

$$Y2 = \frac{d}{dx}(Y1)|_{x=x}$$

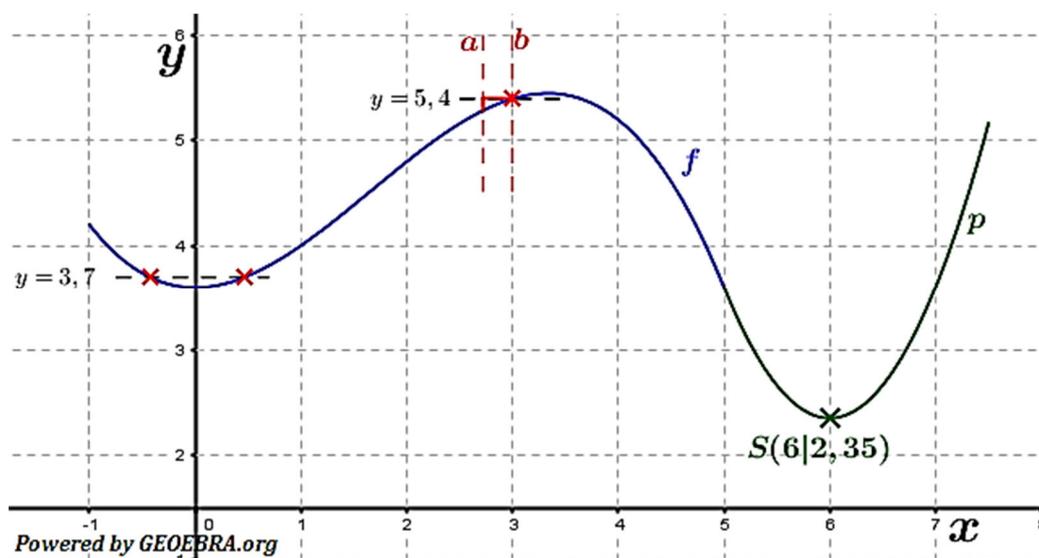
$$Y3 = 3,7$$

$$Y4 = 5,4$$

$$Y5 = 1.25x^2 - 15x + 47.35$$

```
WINDOW
Xmin=-2
Xmax=6
Xscl=1
Ymin=-.5
Ymax=10.5
Yscl=1
↓Xres=3
```

Situationsgrafik:



a) *Höhe des höchsten Punktes:*

Ermittlung des Hochpunktes mit dem GTR. Wegen der Angabe „1 Längeneinheit = 100 m“ den GTR-Wert mit 100 multiplizieren.

Breite des Sees:

Die Oberfläche des Sees liegt 10 m über dem Tiefpunkt. Bestimmung des Tiefpunktes mit dem GTR, eintragen einer Parallelen zur x-Achse im Abstand $f(x_{TP}) + 0,1$. Über die beiden Schnittpunkte dieser Parallelen mit f ergibt sich die Breite des Sees.

Steilste Stelle des Profils zwischen See und dem höchsten Punkt:

Dies ist der Wendepunkt von f . Bestimmung der Stelle mit dem GTR über f' (Wendepunkt wird zum Extremwert in der 1. Ableitung). $f'(x_{WP})$ zeigt die Steigung im Wendepunkt. Der Winkel errechnet sich dann aus $\tan^{-1}(f'(x_{WP}))$.

Achtung!!! GTR-Mode muss auf **DEGREE** stehen.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW

- b) **Flächeninhalt der vorstehenden Wand:**
Berechnung über das Integral zwischen zwei Kurven im Intervall a bis b (siehe Grafik oben). Den Wert von b ermitteln wir aus dem Schnittpunkt der Parallelen zur y -Achse im Abstand 5,4 mit f . Der Wert von a ist dann $b - 0,28$ (Länge des Dachs). Die obere Kurve ist $y = 5,4$, die untere Kurve ist f .
- c) **Tiefster Punkt des benachbarten Tals:**
Gesucht ist der Scheitelpunkt einer Parabel $p(x) = ax^2 + bx + c$, wobei die x -Koordinate mit $x = 6$ bereits gegeben ist. Wir benötigen also ein LGS aus drei Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten a , b und c .

Klausuraufschrieb

- a) **Höhe des höchsten Punktes:**

$$f(x)_{\max} \stackrel{\text{GTR}}{=} 5,45 \text{ für } x = \frac{10}{3}$$

Der höchste Punkt liegt in 545 m über NN.

Breite b des Sees:

$$f(x)_{\min} \stackrel{\text{GTR}}{=} 3,6 \text{ für } x = 0$$

Oberfläche See:

$$y = f(x)_{\min} + 0,1 = 3,7$$

$$f(x) \cap y$$

$$x_1 \stackrel{\text{GTR}}{=} -0,43 \quad x_2 \stackrel{\text{GTR}}{=} 0,47$$

$$b = x_2 - x_1 = 0,47 + 0,43 = 0,9$$

Der See ist 90 m breit.

Steilste Stelle des Profils zwischen See und dem höchsten Punkt:

$$f'(x)_{\max} = 0,8333 \text{ für } x = \frac{5}{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(0,8333) \stackrel{\text{GTR}}{=} 39,8^\circ$$

Der steilste Neigungswinkel beträgt $39,8^\circ$, somit besteht Lawinengefahr.

- b) **Flächeninhalt der vorstehenden Wand:**

$$y = 5,4 \quad | \quad \text{Horizontale in Dachhöhe}$$

$$f \cap y$$

$$x_1 \stackrel{\text{GTR}}{=} 3$$

$$x_1 - 0,28 = 2,72 \quad | \quad \text{Vordere Dachkante}$$

$$A = \int_{2,72}^3 (5,4 - f(x)) dx \stackrel{\text{GTR}}{=} 0,014533$$

Die vorstehende Wand ist $145,3 \text{ m}^2$ groß, also größer als 130 m^2 .

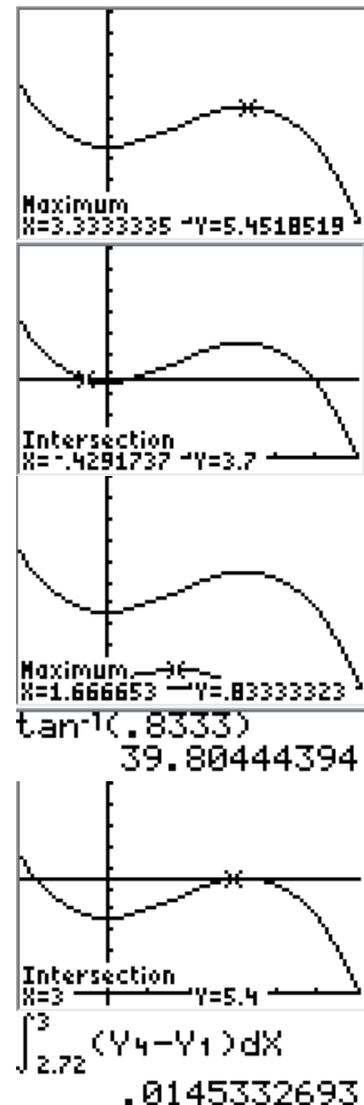
- c) **Tiefster Punkt des benachbarten Tals:**

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Bedingungen:

- | | | |
|---------------------|--|--------------------|
| (1) $p(5) = f(5)$ | | Punktprobe |
| (2) $p'(5) = f'(5)$ | | nahtloser Übergang |
| (3) $p'(6) = 0$ | | Scheitelpunkt |

$$f(5) \stackrel{\text{GTR}}{=} 3,6; \quad f'(5) \stackrel{\text{GTR}}{=} -2,5$$



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$(1) \quad 25a + 5b + c = 3,6$$

$$(2) \quad 10a + b = -2,5$$

$$(3) \quad 12a + b = 0$$

$$\overset{\text{GTR}}{a} = 1,25; \quad \overset{\text{GTR}}{b} = -15; \quad \overset{\text{GTR}}{c} = 47,35$$

$$p(x) = 1,25x^2 - 15x + 47,35$$

$$\overset{\text{GTR}}{p(6)} = 2,35$$

Der tiefste Punkt des benachbarten Tals liegt auf 235 m über NN.

$$\begin{array}{l} [A] \\ \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & 3.6 \\ 10 & 1 & 0 & -2.5 \\ 12 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{rref}([A]) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.25 \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 47.35 \end{bmatrix} \end{array}$$

Lösung A1.2

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

$$Y1 = \frac{1}{x^2} - 1/4$$

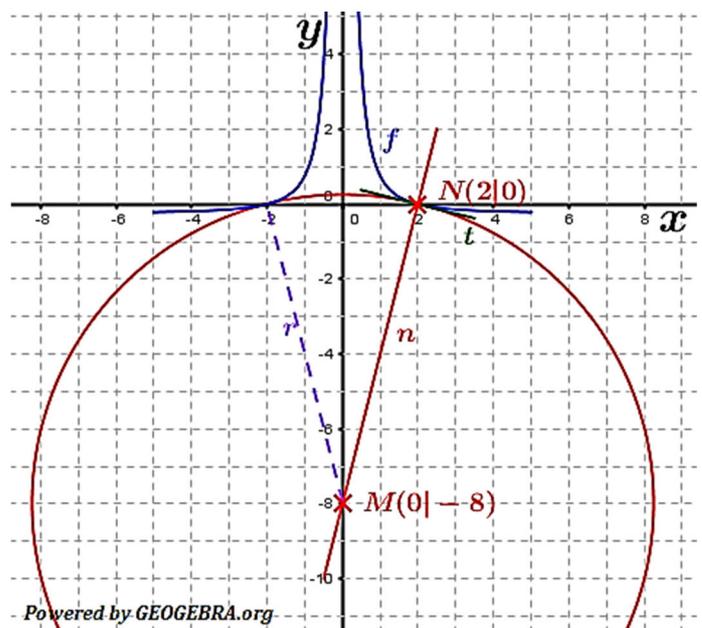
$$Y2 = \frac{d}{dx}(Y1)|_{x=x}$$

```
WINDOW
Xmin=-5
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=5
Yscl=1
↓Xres=3
```

Berührungspunkt bedeutet, dass die Steigung von f mit der Steigung des Kreises übereinstimmen muss. Wir ermitteln zunächst die Nullstellen von f sowie die Steigung in einer Nullstelle (hier in $N(2|0)$).

Im Berührungspunkt steht der Radius des Kreises ja senkrecht auf der Tangente.

Zu bestimmen ist somit der Schnittpunkt der Normalen n durch die Nullstelle mit der y -Achse.



Klausuraufschrieb

$$f(x) = 0$$

$$\overset{\text{GTR}}{x_1} = -2; \quad \overset{\text{GTR}}{x_2} = 2$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad | \quad \text{Punkt-Steigungsformel für Normale}$$

$$\overset{\text{GTR}}{f'(2)} = -0,25$$

$$n(x) = -\frac{1}{-0,25}(x - 2) + 0$$

$$n(x) = 4x - 8$$

$$S_y(0|-8)$$

Der Mittelpunkt des Kreises befindet sich in $M(0|-8)$.

Lösung A2.1

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

$$Y1 = 16e^{-0.5X} - 14e^{-1} - 2$$

$$Y2 = 2$$

$$Y3 = -32e^{-0.5X} + 14e^{-X} - 2X + 168$$

$$Y4 = 153$$

$$Y5 = Y1 + 1$$

$$Y6 = Y1 + 1,56$$

```
WINDOW
Xmin=-1
Xmax=13
Xscl=1
Ymin=-8
Ymax=10
Yscl=1
↓Xres=█
```

a) **Maximale momentane Änderungsrate:**

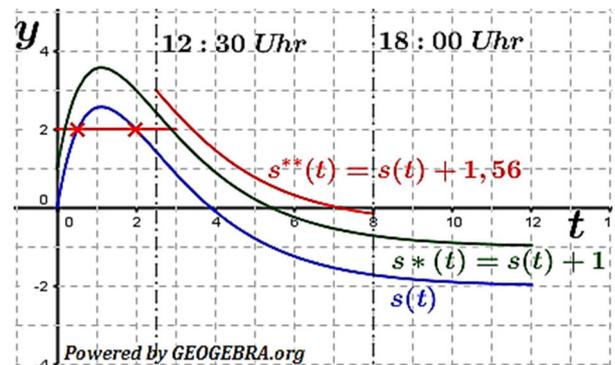
Wir bestimmen den Hochpunkt von s mit dem GTR.

Zeitraum für momentane Änderungsrate größer 2 cm pro Stunde:

Dies ist die Zeit zwischen t_1 und t_2 , den t -Werten der Schnittpunkte von $y = 2$ und $s(t)$.

Schneehöhe um 12:00 Uhr:

Um 10:00 Uhr ($t = 0$) wurden 150 cm gemessen. Die Zu- bzw. Abnahme der Schneehöhe ergibt sich aus dem Integral von $s(t)$ im Interall von $t = 0$ bis $t = 2$ (12:00 Uhr), dieser Wert ist um 150 zu erhöhen.



b) **Integalfreier Funktionsterm:**

Dies ist eine Stammfunktion S von s . Die Integrationskonstante C der Stammfunktion wird über eine Punktprobe mit $P(0|150)$ ermittelt.

Uhrzeit mit 153 cm Schneehöhe:

Nachdem der Funktionsterm aufgestellt ist, bilden wir die Schnittpunkte zwischen $S(t)$ und $y = 153$.

c) **Verlängerungszeitraum der Schneezunahme:**

Die konstante Zunahme der Änderungsrate um 1 cm pro Stunde wird ausgedrückt durch

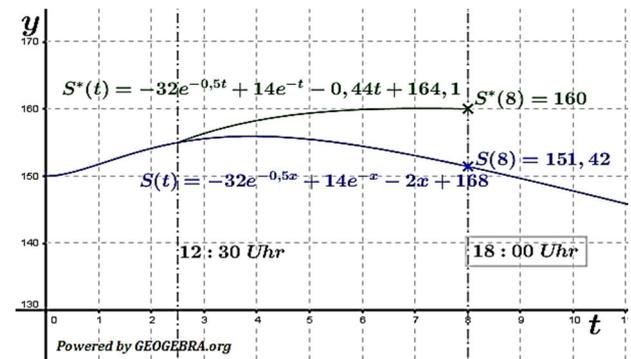
$$s^*(t) = s(t) + 1 = 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 1.$$

Die Schneehöhe nimmt so lange zu, wie die Graphen der Änderungsraten oberhalb der t -Achse verlaufen. Die Verlängerung ergibt sich somit aus $s^*(t) - s(t)$.

Schneemenge pro Stunde der Schneekanone für 160 cm Schnee um 18 Uhr:

Die Schneehöhe ohne Schneekanone um 18 Uhr ist $S(8)$. Die Differenz $\Delta S = 160 - S(8)$ muss von 12:30 Uhr bis 18:00 Uhr aufgebracht werden, somit

$$\frac{\Delta S}{5,5} \text{ cm pro Stunde.}$$



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW

Klausuraufschrieb

a) **Maximale momentane Änderungsrate:**

$$s(t)_{\max}^{\text{GTR}} = 2,57 \text{ für } t = 1,12^{\text{GTR}}$$

Die maximale Änderungsrate beträgt etwa 2,57 cm/h.

Zeitraum für momentane Änderungsrate größer 2 cm pro Stunde:

$$s(t) \cap y = 2$$

$$t_1^{\text{GTR}} = 0,514 \quad t_2^{\text{GTR}} = 1,9917$$

Im Zeitraum von etwa 10:30 bis etwa 12:00 Uhr ist die momentane Änderungsrate größer 2 cm pro Stunde.

Schneehöhe h um 12:00 Uhr:

$$h = \int_0^2 s(t) dt + 150 = 154,12^{\text{GTR}}$$

Die Schneehöhe betrug um 12:00 Uhr etwa 154 cm

b) **Integralfreier Funktionsterm:**

$$S(t) = \int_0^t s(x) dx + C = [-32e^{-0,5x} + 14e^{-x} - 2x]_0^t + C$$

$$= -32e^{-0,5t} + 14e^{-t} - 2t - (-0) + C$$

$$S(t) = -32e^{-0,5t} + 14e^{-t} - 2t + C$$

$$S(0) = 150 = -32 + 14 + C \Rightarrow C = 168$$

Der integralfreie Funktionsterm lautet

$$S(t) = -32e^{-0,5t} + 14e^{-t} - 2t + 168$$

Uhrzeit mit 153 cm Schneehöhe:

$$S(t) \cap y = 153$$

$$t_1^{\text{GTR}} = 1,496 \quad t_2^{\text{GTR}} = 7,030$$

Um etwa 11:30 Uhr und etwa 17:00 Uhr betrug die Schneehöhe 153 cm.

c) **Verlängerungszeitraum der Schneezunahme:**

$$s^*(t) = s(t) + 1 = 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 1$$

$$s(t) = 0 \text{ für } t_1^{\text{GTR}} = 3,89 \quad s^*(t) = 0 \text{ für } t_2^{\text{GTR}} = 5,43$$

$$\Delta t = 5,43 - 3,89 = 1,54$$

Die Maßnahme verlängert den Zeitraum um ungefähr 1,5 Stunden.

Schneemenge pro Stunde der Schneekanonen für 160 cm Schnee um 18 Uhr:

$$S(8)_{\text{Ist}}^{\text{GTR}} = 151,42 \quad S(8)_{\text{Soll}} = 160$$

$$\Delta S(8) = 160 - 151,42 = 8,58$$

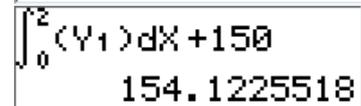
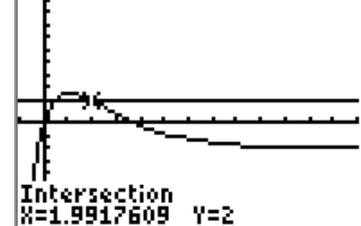
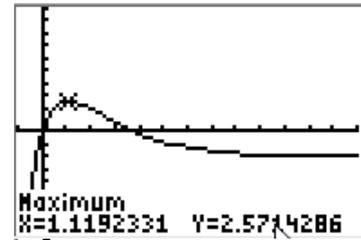
Die Schneekanone muss somit in einem Zeitraum von 5,5 Stunden eine zusätzliche Schneehöhe von

8,58 cm liefern. Leistung pro Stunde: $\frac{8,58}{5,5} = 1,56$

$$s^{**}(t) = s(t) + 1,56 = 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 0,44$$

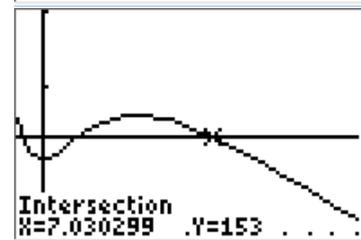
$$S^{**}(t) = -32e^{-0,5t} + 14e^{-t} - 0,44t + 164,1$$

Die Schneekanone muss ab 12:30 Uhr zusätzlich 1,56 cm pro Stunde liefern.



Anpassung Window:

```
WINDOW
Xmin=-1
Xmax=13
Xscl=1
Ymin=140
Ymax=170
Yscl=10
↓Xres=3
```



Anpassung Window:

```
WINDOW
Xmin=-1
Xmax=13
Xscl=1
Ymin=-8
Ymax=10
Yscl=1
↓Xres=█
```



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW
Lösung A2.2
Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

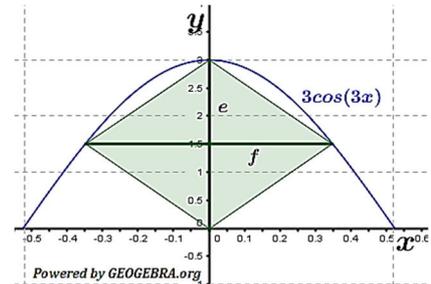
$$\begin{aligned} Y1 &= 3\cos(3X) \\ Y2 &= 1,5 \\ Y3 &= X\cos(X^2/2) \\ Y4 &= X/2 \end{aligned}$$

```
WINDOW
Xmin=-1
Xmax=1
Xscl=.1
Ymin=-1
Ymax=4
Yscl=1
↓Xres=3
```

Achtung!!! GTR-Mode muss auf **RADIAN** stehen.

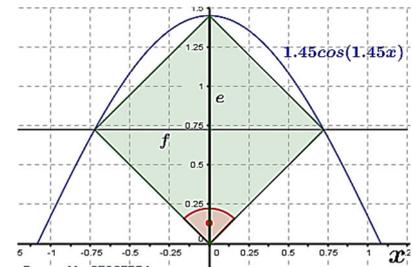
a) *Länge der Diagonalen für $a = 3$:*

Bei einer Raute schneiden sich die Diagonalen orthogonal in ihren Mittelpunkten. Da die eine Diagonale auf der y -Achse liegt und 3 LE lang ist, muss die andere Diagonale bei $g_3(x) = 1,5$ verlaufen. Die Differenz der x -Werte der Schnittpunkte von g_3 mit $y = 1,5$ ergeben die Länge der waagrechten Diagonalen.



b) *a für Raute ist ein Quadrat:*

Bei einem Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich lang. Da $e = a$ ist, muss auch $f = a$ sein. Außerdem verläuft die waagrechte Diagonale auf der Geraden $y = \frac{a}{2}$ und die beiden x -Werte der Schnittpunkte von $g_a(x)$ und $y = \frac{a}{2}$ müssen bei $x_1 = -\frac{a}{2}$ und $x_2 = \frac{a}{2}$ liegen.



Weiterhin muss die Steigung der z.B. unteren rechten Quadratseite gleich 1 sein. Hieraus ergeben sich zwei Lösungsmöglichkeiten, zum einen rein rechnerisch, zum anderen mit dem GTR.

Klausuraufschrieb

a) *Länge der Diagonalen für $a = 3$:*

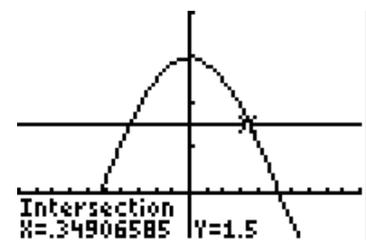
Länge von e bei $f(0) = 3$
Rauten-Diagonalen schneiden sich orthogonal in der Diagonalen-Mitte.

Verlauf von e bei $g_3(x) = 1,5$
 $g_3(x) \cap y = 1,5$

$$\begin{array}{cc} \text{GTR} & \text{GTR} \\ x_1 = -0,35 & x_2 = 0,35 \end{array}$$

Länge von $f = x_2 - x_1 = 0,7$

Die Diagonalen sind $e = 3\text{ LE}$ und $f = 0,9\text{ LE}$ lang.



Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW

b) a für Raute ist ein Quadrat:

Im Quadrat sind die Diagonalen gleich lang, also $e = a \wedge f = a$. Das Quadrat liegt achsensymmetrisch. Wegen der Rechtwinkligkeit müssen die Quadratseiten die Steigung 1 bzw. -1 haben. Der äußerste rechte Punkt hat die Koordinaten $P\left(\frac{a}{2} \mid f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$. Dann gilt für die Steigung:

$$m = 1 = \frac{g_a\left(\frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)} \Rightarrow \frac{a}{2} = g_a\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$a \cos\left(a \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} \quad | :a$$

$$\cos\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$a^2 = \frac{2}{3}\pi \quad | \sqrt{\quad}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\pi}; \quad a_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}\pi}$$

Wegen $a > 0$ ist $a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\pi}$ die einzige Lösung.

Alternativ mit GTR:

$$a \cos\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

GTR

$$a = 1,45$$

