*Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW*

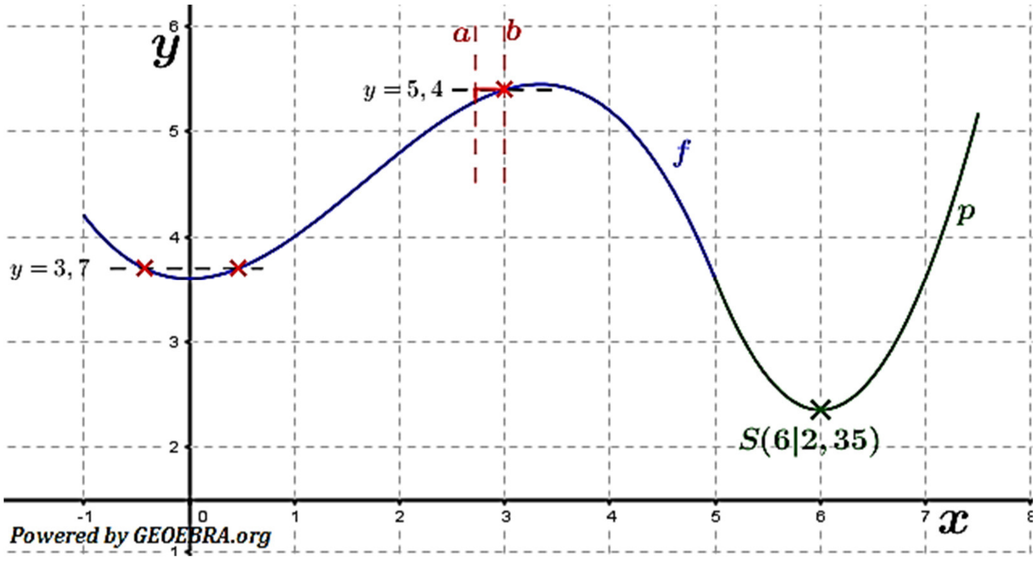
# Lösung A1.1
## Lösungslogik

*GTR-Einstellungen:*

Y1=$-0.1X^3+.5X^2+3.6$
Y2=$\frac{d}{dX}(Y1)|_{X=X}$
Y3=$3{,}7$
Y4=$5.4$
Y5=$1.25x^2-15x+47.35$

```
WINDOW
 Xmin=-2
 Xmax=6
 Xscl=1
 Ymin=-.5
 Ymax=10
 Yscl=1
↓Xres=3
```

*Situationsgrafik:*




a) *Höhe des höchsten Punktes:*
Ermittlung des Hochpunktes mit dem GTR. Wegen der Angabe „$1$ Längeneinheit = $100\,m$" den GTR-Wert mit $100$ multiplizieren.
*Breite des Sees:*
DieOberfläche des Sees liegt $10\,m$ über dem Tiefpunkt. Bestimmung des Tiefpunktes mit dem GTR, eintragen einer Parallelen zur $x$-Achse im Abstand $f(x_{TP})+0{,}1$. Über die beiden Schnittpunkte dieser Parallelen mit $f$ ergibt sich die Breite des Sees.
*Steilste Stelle des Profils zwischen See und dem höchsten Punkt:*
Dies ist der Wendepunkt von $f$. Bestimmung der Stelle mit dem GTR über $f'$ (Wendepunkt wird zum Extremwert in der 1. Ableitung). $f'(x_{WP})$ zeigt die Steigung im Wendepunkt. Der Winkel errechnet sich dann aus $\tan^{-1}(f'(x_{WP}))$.
**Achtung!!!** GTR-Mode muss auf ***DEGREE*** stehen.

b) *Flächeninhalt der vorstehenden Wand:*
Berechnung über das Integral zwischen zwei Kurven im Intervall $a$ bis $b$ (siehe Grafik oben). Den Wert von $b$ ermitteln wir aus dem Schnittpunkt der Parallelen zur $y$-Achse im Abstand $5{,}4$ mit $f$. Der Wert von $a$ ist dann $b-0{,}28$ (Länge des Dachs). Die obere Kurve ist $y=5{,}4$, die untere Kurve ist $f$.

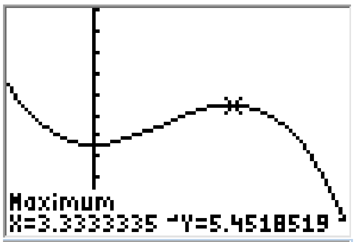
c) *Tiefster Punkt des benachbarten Tals:*
Gesucht ist der Scheitelpunkt einer Parabel $p(x)=ax^2+bx+c$, wobei die $x$-Koordinate mit $x=6$ bereits gegeben ist. Wir benötigen also ein LGS aus drei Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten $a$, $b$ und $c$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) *Höhe des höchsten Punktes:*

$f(x)_{max} \overset{GTR}{=} 5{,}45$ für $x=\frac{10}{3}$

*Der höchste Punkt liegt in 545 m über NN.*




*Breite* $b$ *des Sees:*

$f(x)_{min} \overset{GTR}{=} 3{,}6$ für $x=0$

Oberfläche See:

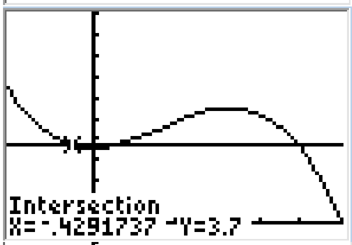
$y=f(x)_{min}+0{,}1=3{,}7$

$f(x)\cap y$

$x_1 \overset{GTR}{=} -0{,}43$ $\qquad x_2 \overset{GTR}{=} 0{,}47$

$b=x_2-x_1=0{,}47+0{,}43=0{,}9$

*Der See ist* $90\,m$ *breit.*

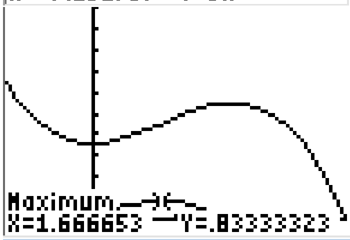



*Steilste Stelle des Profils zwischen See und dem höchsten Punkt:*

$f'(x)_{max}=0{,}8333$ für $x=\frac{5}{3}$

$\alpha=\tan^{-1}(0{,}8333) \overset{GTR}{=} 39{,}8\,°$.

*Der steilste Neigungswinkel beträgt* $39{,}8\,°$, *somit besteht Lawinengefahr.*




tan⁻¹(.8333)
39.80444394

b) *Flächeninhalt der vorstehenden Wand:*

$y=5{,}4$ | Horizontale in Dachhöhe

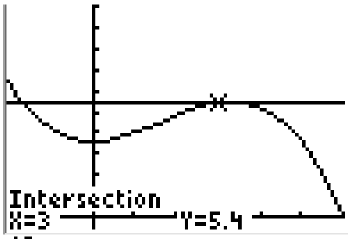
$f\cap y$

$x_1 \overset{GTR}{=} 3$

$x_1-0{,}28=2{,}72$ | Vordere Dachkante

$A=\int_{2{,}72}^{3}(5{,}4-f(x))\,dx \overset{GTR}{=} 0{,}014533$

*Die vorstehende Wand ist* $145{,}3\,m^2$ *groß, also größer als* $130\,m^2$.




$\int_{2.72}^{3}(Y_4-Y_1)dX$
.0145332693

c) *Tiefster Punkt des benachbarten Tals:*

$p(x)=ax^2+bx+c$

Bedingungen:

(1) $p(5)=f(5)$ | Punktprobe
(2) $p'(5)=f'(5)$ | nahtloser Übergang
(3) $p'(6)=0$ | Scheitelpunkt

$f(5) \overset{GTR}{=} 3{,}6;$ $\qquad f'(5) \overset{GTR}{=} -2{,}5$

*Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW*

$p'(x) = 2ax + b$

(1) $25a + 5b + c = 3{,}6$

(2) $10a + b = -2{,}5$

(3) $12a + b = 0$

$a \overset{GTR}{=} 1{,}25;\quad b \overset{GTR}{=} -15;\quad c \overset{GTR}{=} 47{,}35$

$p(x) = 1{,}25x^2 - 15x + 47{,}35$

$p(6) \overset{GTR}{=} 2{,}35$

*Der tiefste Punkt des benachbarten Tals liegt auf* $235\ m$ *über NN.*

```
[A]
    [25 5 1  3.6 ]
    [10 1 0 -2.5 ]
    [12 1 0   0  ]
rref([A])
    [1 0 0  1.25 ]
    [0 1 0  -15  ]
    [0 0 1 47.35 ]
```

## Lösung A1.2

### Lösungslogik

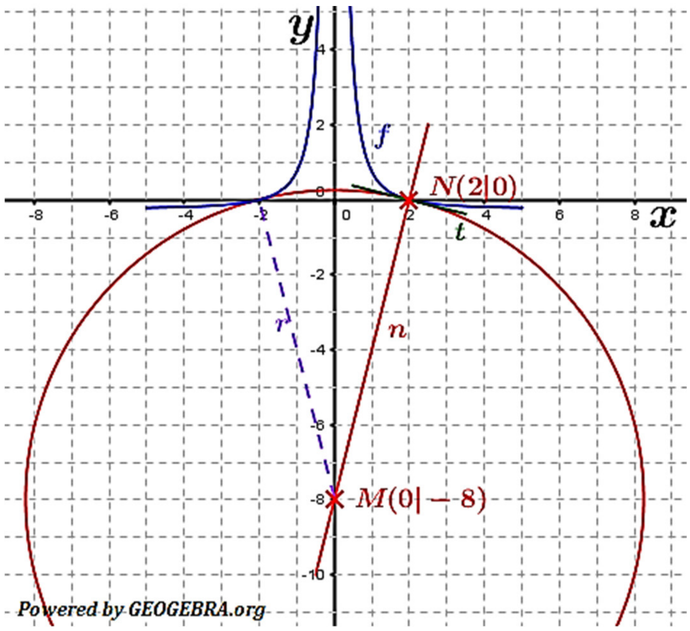
*GTR-Einstellungen:*

$Y1 = \frac{1}{X^2} - 1/4$

$Y2 = \frac{d}{dX}(Y1)|_{X=X}$

```
WINDOW
 Xmin=-5
 Xmax=5
 Xscl=1
 Ymin=-5
 Ymax=5
 Yscl=1
↓Xres=3
```

Berührpunkt bedeutet, dass die Steigung von $f$ mit der Steigung des Kreises übereinstimmen muss. Wir ermitteln zunächst die Nullstellen von $f$ sowie die Steigung in einer Nullstelle (hier in $N(2|0)$).
Im Berührpunkt steht der Radius des Kreises ja senkrecht auf der Tangente.
Zu bestimmen ist somit der Schnittpunkt der Normalen $n$ durch die Nullstelle mit der $y$-Achse.




### Klausuraufschrieb

$f(x) = 0$

$x_1 \overset{GTR}{=} -2;\quad x_2 \overset{GTR}{=} 2$

$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$ | Punkt-Steigungsformel für Normale

$f'(2) \overset{GTR}{=} -0{,}25$

$n(x) = -\frac{1}{-0{,}25}(x - 2) + 0$

$n(x) = 4x - 8$

$S_y(0|-8)$

*Der Mittelpunkt des Kreises befindet sich in* $M(0|-8)$.

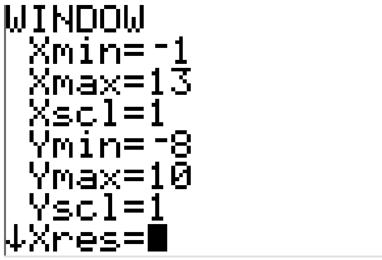
*Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW*

# Lösung A2.1

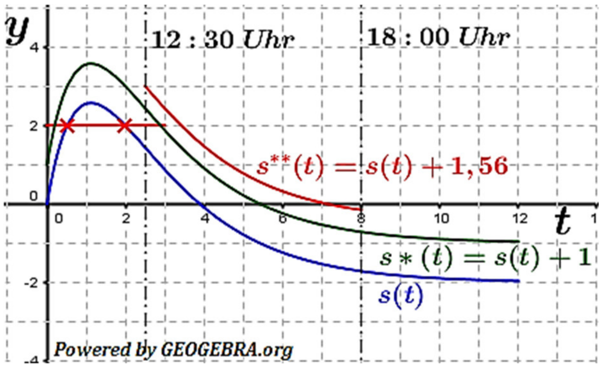
## Lösungslogik

*GTR-Einstellungen:*

Y1=$16e^{-0.5X} - 14e^{-1} - 2$
Y2=$2$
Y3=$-32e^{-0.5X} + 14e^{-X} - 2X + 168$
Y4=$153$
Y5=$Y1 + 1$
Y6=$Y1 + 1{,}56$

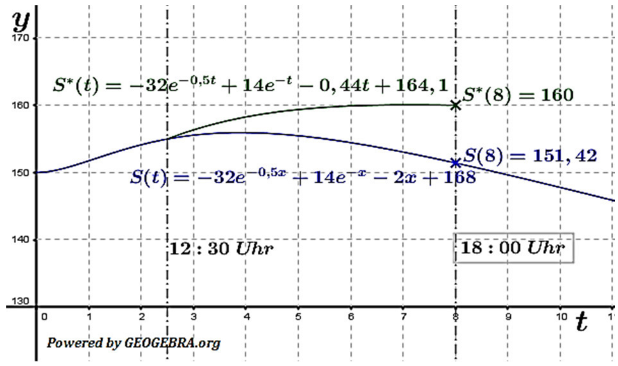



a) *Maximale momentane Änderungsrate:*
Wir bestimmen den Hochpunkt von $s$ mit dem GTR.
*Zeitraum für momentane Änderungsrate größer $2\,cm$ pro Stunde:*
Dies ist die Zeit zwischen $t_1$ und $t_2$, den $t$-Werten der Schnittpunkte von $y = 2$ und $s(t)$.
*Schneehöhe um $12{:}00$ Uhr:*
Um $10{:}00$ Uhr ($t = 0$ ) wurden $150\,cm$ gemessen. Die Zu- bzw. Abnahme der Schneehöhe ergibt sich aus dem Integral von $s(t)$ im Interall von $t = 0$ bis $t = 2$ ($12{:}00$ Uhr), dieser Wert ist um $150$ zu erhöhen.




b) *Integralfreier Funktionsterm:*
Dies ist eine Stammfunktion $S$ von $s$. Die Integrationskonstante $C$ der Stammfunktion wird über eine Punktprobe mit $P(0|150)$ ermittelt.
*Uhrzeit mit $153\,cm$ Schneehöhe:*
Nachdem der Funktionsterm aufgestellt ist, bilden wir die Schnittpunkte zwischen $S(t)$ und $y = 153$.

c) *Verlängerungszeitraum der Schneezunahme:*
Die konstante Zunahme der Änderungsrate um $1\,cm$ pro Stunde wird ausgedrückt durch
$s^*(t) = s(t) + 1 = 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 1$.
Die Schneehöhe nimmt so lange zu, wie die Graphen der Änderungsraten oberhalb der $t$-Achse verlaufen. Die Verlängerung ergibt sich somit aus $s^*(t) - s(t)$.




*Schneemenge pro Stunde der Schneekanone für $160\,cm$ Schnee um $18$ Uhr:*
Die Schneehöhe ohne Schneekanone um $18$ Uhr ist $S(8)$. Die Differenz $\Delta S = 160 - S(8)$ muss von $12{:}30$ Uhr bis $18{:}00$ Uhr aufgebracht werden, somit $\frac{\Delta S}{5{,}5}\,cm$ pro Stunde.

## *Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW*

Klausuraufschrieb

a) *Maximale momentane Änderungsrate:*

$s(t)_{max} \overset{\text{GTR}}{=} 2{,}57$ für $t \overset{\text{GTR}}{=} 1{,}12$

*Die maximale Änderungsrate beträgt etwa 2,57 cm/h.*

*Zeitraum für momentane Änderungsrate größer* $2\,cm$ *pro Stunde:*

$s(t) \cap y = 2$

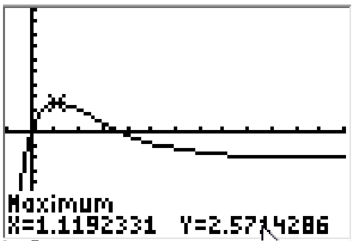
$t_1 \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}514 \qquad t_2 \overset{\text{GTR}}{=} 1{,}9917$

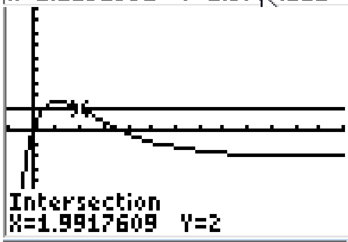
*Im Zeitraum von etwa* $10{:}30$ *bis etwa* $12{:}00$ *Uhr ist die momentane Änderungsrate größer* $2\,cm$ *pro Stunde.*

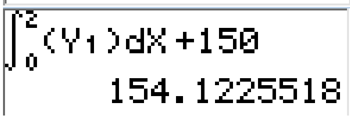
*Schneehöhe* $h$ *um* $12{:}00$ *Uhr:*

$h = \int_0^2 s(t)\,dt + 150 \overset{\text{GTR}}{=} 154{,}12$

Die *Schneehöhe betrug um* $12{:}00$ *Uhr etwa* $154\,cm$




b) *Integralfreier Funktionsterm:*

$S(t) = \int_0^t s(x)\,dx + C = [-32e^{-0{,}5x} + 14e^{-x} - 2x]_0^t + C$

$= -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 2t - (-0) + C$

$S(t) = -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 2t + C$

$S(0) = 150 = -32 + 14 + C \Longrightarrow \quad C = 168$

*Der integralfreie Funktionsterm lautet*

$S(t) = -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 2t + 168$

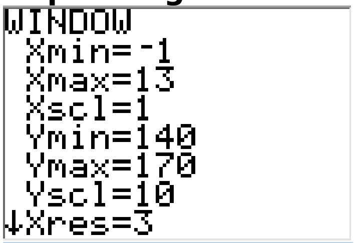
*Uhrzeit mit* $153\,cm$ *Schneehöhe:*

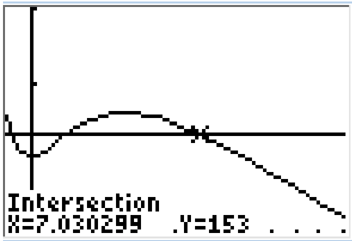
$S(t) \cap y = 153$

$t_1 \overset{\text{GTR}}{=} 1{,}496 \qquad t_2 \overset{\text{GTR}}{=} 7{,}030$

Um etwa $11{:}30$ *Uhr und etwa* $17{:}00$ *Uhr betrug die Schneehöhe* $153\,cm$.

**Anpassung Window:**




c) *Verlängerungszeitraum der Schneezunahme:*

$s^*(t) = s(t) + 1 = 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 1$

$s(t) = 0$ *für* $t_1 \overset{\text{GTR}}{=} 3{,}89 \qquad s^*(t) = 0$ *für* $t_2 \overset{\text{GTR}}{=} 5{,}43$

$\Delta t = 5{,}43 - 3{,}89 = 1{,}54$

*Die Maßnahme verlängert den Zeitraum um ungefähr* $1{,}5$ *Stunden.*

*Schneemenge pro Stunde der Schneekanonen für* $160\,cm$ *Schnee um* $18$ *Uhr:*

$S(8)_{Ist} \overset{\text{GTR}}{=} 151{,}42 \qquad S(8)_{Soll} = 160$

$\Delta S(8) = 160 - 151{,}42 = 8{,}58$

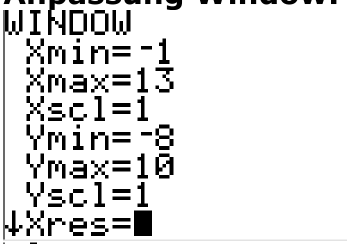
Die Schneekanone muss somit in einem Zeitraum von $5{,}5$ Stunden eine zusätzliche Schneehöhe von $8{,}58\,\mathrm{cm}$ liefern. Leistung pro Stunde: $\frac{8{,}58}{5{,}5} = 1{,}56$

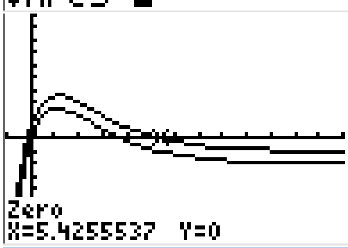
$s^{**}(t) = s(t) + 1{,}56 = 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 0{,}44$

$S^{**}(t) = -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 0{,}44t + 164{,}1$

*Die Schneekanone muss ab* $12{:}30$ *Uhr zusätzlich* $1{,}56\,cm$ *pro Stunde liefern.*

**Anpassung Window:**



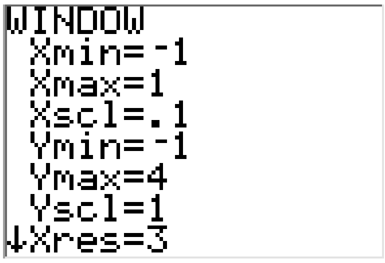
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2016 BW

# Lösung A2.2

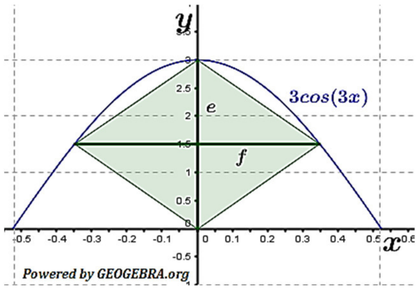
## Lösungslogik

*GTR-Einstellungen:*

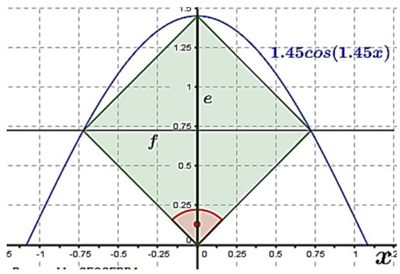
Y1=$3\cos(3X)$
Y2=$1{,}5$
Y3=$X\cos(X^2/2)$
Y4=$X/2$




**Achtung!!!** GTR-Mode muss auf ***RADIAN*** stehen.



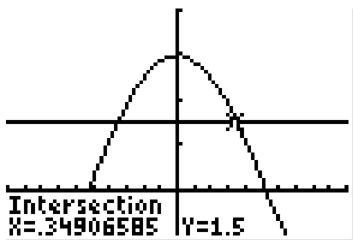

a) *Länge der Diagonalen für $a = 3$:*
Bei einer Raute schneiden sich die Diagonalen orthogonal in ihren Mittelpunkten. Da die eine Diagonale auf der $y$-Achse liegt und $3\,LE$ lang ist, muss die andere Diagonale bei $g_3(x) = 1{,}5$ verlaufen. Die Differenz der $x$-Werte der Schnittpunkte von $g_3$ mit $y = 1{,}5$ ergeben die Länge der waagrechten Diagonalen.




b) *$a$ für Raute ist ein Quadrat:*
Bei einem Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich lang. Da $e = a$ ist, muss auch $f = a$ sein. Außerdem verläuft die waagrechte Diagonale auf der Geraden $y = \frac{a}{2}$ und die beiden $x$-Werte der Schnittpunkte von $g_a(x)$ und $y = \frac{a}{2}$ müssen bei $x_1 = -\frac{a}{2}$ und $x_2 = \frac{a}{2}$ liegen.
Weiterhin muss die Steigung der z.B. unteren rechten Quadratseite gleich $1$ sein.
Hieraus ergeben sich zwei Lösungsmöglichkeiten, zum einen rein rechnerisch, zum anderen mit dem GTR.

## Klausuraufschrieb

a) *Länge der Diagonalen für $a = 3$:*
Länge von $e$ bei $f(0) = 3$
Rauten-Diagonalen schneiden sich orthogonal in der Diagonalen-Mitte.
Verlauf von $e$ bei $g_3(x) = 1{,}5$
$g_3(x) \cap y = 1{,}5$
$x_1 \overset{GTR}{=} -0{,}35 \qquad x_2 \overset{GTR}{=} 0{,}35$
Länge von $f = x_2 - x_1 = 0{,}7$
*Die Diagonalen sind $e = 3\,LE$ und $f = 0{,}9\,LE$ lang.*



b) *$a$ für Raute ist ein Quadrat:*

Im Quadrat sind die Diagonalen gleich lang, also $e = a \wedge f = a$. Das Quadrat liegt achsensymmetrisch. Wegen der Rechtwinkligkeit müssen die Qudratseiten die Steigung $1$ bzw. $-1$ haben. Der äußerste rechte Punkt hat die Koordinaten $P\left(\frac{a}{2}\middle|f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$. Dann gilt für die Steigung:

$m = 1 = \frac{g_a\left(\frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)} \Rightarrow \frac{a}{2} = g_a\left(\frac{a}{2}\right)$

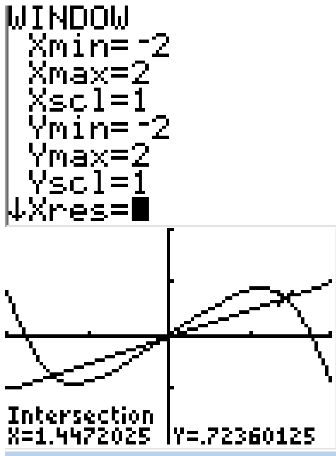
$a\,cos\left(a \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} \qquad | \quad :a$

$cos\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{\pi}{3}$

$a^2 = \frac{2}{3}\pi \qquad | \quad \sqrt{\phantom{x}}$

$a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\pi};\ \ a_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}\pi}$

*Wegen $a > 0$ ist $a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\pi}$ die einzigste Lösung.*




Alternativ mit GTR:

$a\,cos\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a}{2}$

$a \overset{\text{GTR}}{=} 1{,}45$