Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2005 BW

Aufgabe B1

Gegeben sind eine Pyramide $ABCDS$ mit den Punkten $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(8|8|0)$, $D(0|8|0)$ und $S(4|4|8)$ sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_r: $rx_1 + 3x_3 = 8r$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Die Ebene E_2 enthält die Pyramidenkante BC und schneidet die Kante DS in F und die Kante AS in G.
Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und G an. Zeichnen Sie das Viereck $BCFG$ ein.
Zeigen Sie, dass dieses Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.
Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes?

b) Bestimmen Sie r^* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat.
Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene E_{r^*} an, der von S den Abstand 4 hat.

c) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt.
Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur. Welche Schnittfiguren sind möglich?
Geben Sie die jeweiligen Werte von r an.

Aufgabe B2.1

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|3)$ und $B(2|5|3)$ sowie die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

a) Die Ebene E enthält die Punkte A und B und verläuft parallel zu g.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E.
Beschreiben Sie die Lage der Ebene E.
Welchen Abstand hat g von E?

b) Der Punkt T liegt auf der Geraden g und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von T.
Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABT?
Bestimmen Sie einen Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat.

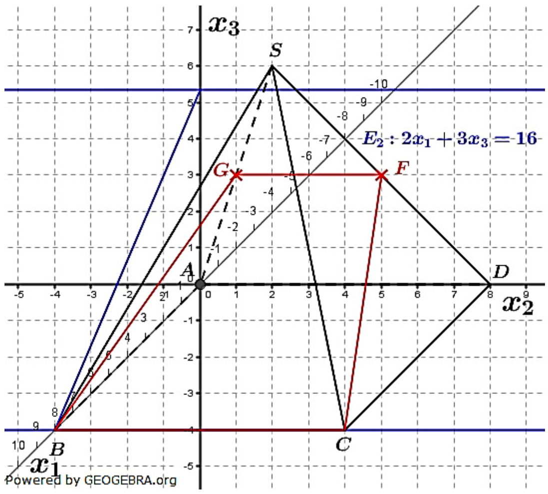
c) Das Dreieck ABC mit $C(2|3|5)$ rotiert um die Seite AB. Dabei entsteht ein Doppelkegel.
Bestimmen Sie dessen Volumen.

Aufgabe B2.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Die Punkte P, Q, R und S bilden die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S. Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Strecken PQ und PR, die Punkte M_3 und M_4 sind die Mittelpunkte der Strecken QS und RS. Zeigen Sie, dass $\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4}$ gilt.

Lösung B1
Lösungslogik

a) *Koordinaten von F und G:*
Wir schneiden die Geraden durch die Punkte D und S bzw. A und S mit der Ebene E_2.
Nachweis gleichschenkliges Trapez $BCFG$:
Nachweis des Trapezes über Parallelität zweier Kanten unterschiedlicher Länge sowie zwei nicht parallele Kanten mit gleicher Länge.
Innenwinkel des Trapezes:
Berechnung der Innenwinkel über die Schnittwinkelformel von Vektoren.



b) *r^* für Abstand Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} gleich 4:*
Berechnung von r^* über die HNF.
Bestimmung des Punktes in E_{r^*} der von S den Abstand 4 hat:
Dies ist der Schnittpunkt der Geraden durch S mit dem Normalenvektor der Ebene E_{r^*} als Richtungsvektor.

c) *Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r:*
Wir bilden $g_{BC} \cap E_r$ und weisen nach, dass das Ergebnis unabhängig von r ist.
Mögliche Schnittfiguren und zugehörige r:
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinaten von F und G:*
$F \in g_{DS}$
$$g_{DS}\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}4\\-4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + k^* \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$
$E_2 \cap g_{DS}$
$x_1 = k; \quad x_3 = 2k$
$2k + 6k = 16 \implies k = 2$
$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix} \implies F(2|6|4)$$
$G \in g_{AS}$
$$g_{AS}\colon\ \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} = k^* \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$
$E_2 \cap g_{AS}$
$x_1 = k; \quad x_3 = 2k$
$2k + 6k = 16 \implies k = 2$
$$\overrightarrow{OG} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} \implies G(2|2|4)$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2005 BW

Nachweis gleichschenkliges Trapez $ABFG$:

Bedingung für Gleichschenkligkeit:

$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{FG} \wedge |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{FG}| \wedge \overrightarrow{BG} \nparallel \overrightarrow{CF} \wedge |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{CF}|$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{FG}$

$|\overrightarrow{BC}| = 8; \quad |\overrightarrow{FG}| = 4 \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{FG}|$

$\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BG} \nparallel \overrightarrow{CF}$

$|\overrightarrow{BG}| = \sqrt{56}; \quad |\overrightarrow{CF}| = \sqrt{56} \Rightarrow |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{CF}|$

Alle Bedingungen sind erfüllt, das Viereck $ABFG$ ist ein gleichschenkliges Trapez.

Innenwinkel des Trapezes:

$\sphericalangle(GBC) = \alpha; \quad \sphericalangle(BCF) = \beta = \alpha; \quad \sphericalangle(CFG) = \sphericalangle(BGF) = \gamma = 180° - \alpha$

$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{BG}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BG}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{8 \cdot \sqrt{56}} = \frac{16}{8 \cdot \sqrt{56}}$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{16}{8 \cdot \sqrt{56}}\right) = 74{,}5\,°$

$\gamma = 180° - 74{,}5° = 105{,}5\,°$

Die Innenwinkel des Trapezes betragen $74{,}5\,°$ und $105{,}5\,°$.

b) *r^* für Abstand Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} gleich 4:*

Abstand Punkt Ebene über die HNF:

$h = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$h = 4 = \frac{|4 \cdot r^* + 3 \cdot 8 - 8r^*|}{\sqrt{r^{*2} + 9}}$

$4 \cdot \sqrt{r^{*2} + 9} = |4r^* + 24 - 8r^*| \qquad | \quad :4$

$\sqrt{r^{*2} + 9} = |-r^* + 6| \qquad | \quad ^2$

$r^{*2} + 9 = r^{*2} - 12r^* + 36$

$12r^* = 27$

$r^* = \frac{9}{4}$

Die Pyramidenspitze S hat von der Ebene $E_{\frac{9}{4}}$ den Abstand 4.

Bestimmung des Punktes in E_r, der von S den Abstand 4 hat:

Lotfußpunkt L in $E_{\frac{9}{4}}$:

$g_{SL}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + k^* \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$E_{\frac{9}{4}} \cap g_{SL}$

$x_1 = 4 + 3k; \quad x_3 = 8 + 4k$

$\frac{9}{4}(4 + 3k) + 3(8 + 4k) = 18$

$9 + \frac{27}{4}k + 24 + 12k = 18$

$\frac{75}{4}k = -15 \Rightarrow k = -\frac{4}{5}$

$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} - \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\4\\\frac{24}{5}\end{pmatrix}$

Der Punkt $L \in E_{\frac{9}{4}}$ hat die Koordinaten $L\left(\frac{8}{5}|4|\frac{24}{5}\right)$.

c) *Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r:*

$g_{BC}\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + k^* \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$E_r \cap g_{BC}$

$x_1 = 8; \quad x_3 = 0$

$8r + 0 = 8r$ | wahre Aussage

Das LGS hat unendlich viele Lösungen, also $g_{BC} \in E_r$, die Gerade g_{BC} ist die Schnittgerade aller E_r

Mögliche Schnittfiguren und zugehörige r:

Wie wir soeben gesehen haben, dreht sich E_r um die Gerade BC. Ist $r = 0$, so beschreibt E_0 die x_1x_2–Ebene mit $E_0\colon\ x_3 = 0$. Die Schnittfläche ist die Grundfläche der Pyramide, ein Quadrat.

Liegt der Punkt S in der Ebene, ist die Schnittfläche das gleichseitige Dreieck der Vorderseite der Pyramide. Wir errechnen hierfür r mit

$r \cdot x_{1_S} + 3 \cdot x_{3_S} = 8r$

$r \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 8r \quad \Rightarrow \quad r = 6$

Für alle Werte $0 < r < 6$ ist die Schnittfigur ein gleichseitiges Trapez.

Wir fassen zusammen:

Die Ebene E_r schneidet die Pyramide:

- für $r = 0$ in einem Quadrat
- für $0 < r < 6$ in einem gleichseitigen Trapez
- für $r = 6$ in einem gleichschenkligen Dreieck
- für $r < 0 \vee r > 6$ in der Strecke BC.

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Gleichung der Ebene E:*

Aufpunkt von E ist der Punkt A, ein Richtungsvektor ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$, der zweite Richtungsvektor ist der Richtungsvektor der Geraden, da $g \parallel E$ sein soll.

Lagebeschreibung von E:

Siehe Klausuraufschrieb.

Abstand g von E:

Siehe Klausuraufschrieb.

b) *Koordinaten des Punktes T:*

$\overrightarrow{AT} \circ \overrightarrow{BT} = 0$ (wegen Rechtwinkligkeit) führt zu den Koordinaten von T.

Flächeninhalt Dreieck ABT:

Flächeninhalt des Dreiecks ist $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AT}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BT}\right|$

Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat:

Da das Dreieck ABT rechtwinklig ist, ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ der Punkt mit dem gleichen Abstand zu den Eckpunkten des Dreiecks (Thaleskreis).

c) *Volumen des Doppelkegels:*
Bestimmung des Abstandes von C zur Geraden g_{AB} entspricht dem Radius des Grundkreises des Doppelkegels. Der Fußpunkt L der Hilfsebene durch C mit dem Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor ergibt die einzelnen Höhen der Teilkegel. Die Strecke AL ist die Höhe des einen Kegels, die Strecke LB die Höhe des zweiten Kegels. Das Volumen errechnet sich somit aus: $V_{Doppelkeg} = \frac{1}{3}\pi\left|\overrightarrow{LC}\right|^2 \cdot \left(\left|\overrightarrow{AL}\right| + \left|\overrightarrow{LB}\right|\right)$.

Klausuraufschrieb

a) *Gleichung der Ebene E:*

$$E:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{rv_g}$$

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ s^*, t \in \mathbb{R}$$

Lagebeschreibung von E:
Die Ebene E verläuft parallel zur x_1x_2–Ebene im Abstand $x_{3_E} = 3$, da die x_3–Komponenten der beiden Richtungsvektoren 0 sind.
Abstand g von E:
Wegen $g \parallel E$ und $x_{3_g} = 5$ hat die Gerade einen Abstand von $x_{3_g} - x_{3_E} = 5 - 3 = 2$ zur Ebene E.

b) *Koordinaten des Punktes T:*
Bedingung für rechten Winkel:

$$\overrightarrow{AT} \circ \overrightarrow{BT} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 + r - 2 \\ 3 - 1 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 + r - 2 \\ 3 - 5 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 + r \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 + r \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(3 + r)^2 - 4 + 4 = 0 \implies r = -3$$

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $T(2|3|5)$.
Flächeninhalt Dreieck ABT:

$$A_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 4$$

Die Fläche des Dreiecks ABT beträgt $4\ FE$.
Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat:
Wegen Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABT ist dieser Punkt der Mittelpunkt des Thaleskreises über der Strecke $\overline{AB}$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $M(2|3|3)$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2005 BW

c) *Volumen des Doppelkegels:*

Abstand von C zur Geraden g_{AB} ist Radius des Grundkreises des Doppelkegels. Da zum einen der gegebene Punkt C mit dem in Teilaufgabe b) errechneten Punkt M übereinstimmt, zum anderen wegen $|\overrightarrow{AT}| = |\overrightarrow{BT}| = \sqrt{8}$ das Dreieck ABC gleichschenklig, rechtwinklig ist, ist Punkt M aus Teilaufgabe b) der Lotfußpunkt von C auf $\overline{AB}$. Somit ist der Radius des Grundkreises des Doppelkegels $r = |\overrightarrow{MC}|$.

$$r = |\overrightarrow{MC}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 2$$

Die Höhen der Kegelhälften sind $h_1 = |\overrightarrow{AM}|$ und $h_2 = |\overrightarrow{BM}|$.

$$V_{Doppelkeg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (h_1 + h_2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot \left(\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{4} = \frac{16}{3}\pi$$

Das Volumen des Doppelkegels beträgt $\frac{16}{3}\pi\ VE$.

Lösung B2.2

Klausuraufschrieb

Behauptung: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$

Wir wählen zunächst die Vektoren $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PR} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{PS} = \vec{c}$. Nun gilt:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

Mit $\overrightarrow{QS} = -\vec{a} + \vec{c}$ und $\overrightarrow{RS} = -\vec{b} + \vec{c}$ erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_3M_4} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{QS} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-\vec{a} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2}\end{aligned}$$