Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2005 BW

Aufgabe B1

Gegeben sind eine Pyramide $ABCDS$ mit den Punkten $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(8|8|0)$, $D(0|8|0)$ und $S(4|4|8)$ sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_r: $rx_1 + 3x_3 = 8r$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Die Ebene E_2 enthält die Pyramidenkante BC und schneidet die Kante DS in F und die Kante AS in G.
Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und G an. Zeichnen Sie das Viereck $BCFG$ ein.
Zeigen Sie, dass dieses Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.
Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes?

b) Bestimmen Sie r^* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat.
Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene E_{r^*} an, der von S den Abstand 4 hat.

c) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt.
Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur.
Welche Schnittfiguren sind möglich?
Geben Sie die jeweiligen Werte von r an.

Aufgabe B2.1

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|3)$ und $B(2|5|3)$ sowie die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

a) Die Ebene E enthält die Punkte A und B und verläuft parallel zu g.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E.
Beschreiben Sie die Lage der Ebene E.
Welchen Abstand hat g von E?

b) Der Punkt T liegt auf der Geraden g und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von T.
Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABT?
Bestimmen Sie einen Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat.

c) Das Dreieck ABC mit $C(2|3|5)$ rotiert um die Seite AB. Dabei entsteht ein Doppelkegel.
Bestimmen Sie dessen Volumen.

Aufgabe B2.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Die Punkte P, Q, R und S bilden die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S. Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Strecken PQ und PR, die Punkte M_3 und M_4 sind die Mittelpunkte der Strecken QS und RS. Zeigen Sie, dass $\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4}$ gilt.