Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

Aufgabe B1.1

Die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ stellt für $x_3 \geq 0$ einen Hang dar, der aus der x_1x_2-Ebene aufsteigt.
Im Punkt $H(6|4|0)$ steht ein $80\,m$ hoher Sendemast senkrecht zur x_1x_2-Ebene. ($1\,LE$ entspricht $10\,m$)

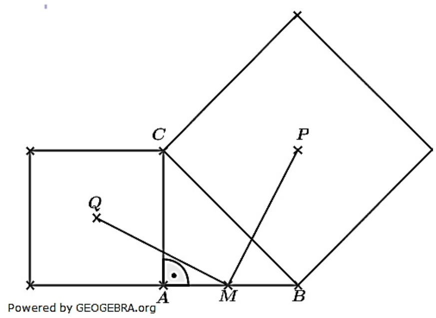
a) Stellen Sie den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs.
Der Sendermast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.
Bestimmen Sie die Länge des Stahlseils.

b) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs.
Beschreiben Sie einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.

c) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6|4|k)$ um.
Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4|0|2)$.
Bestimmen Sie die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist.

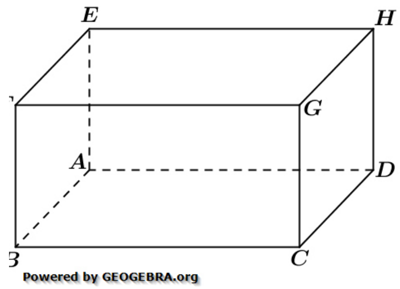
Aufgabe B1.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig, P und Q sind die Schnittpunkte der Quadratdiagonalen, M ist die Mitte von AB.
Beweisen Sie, dass die Strecken MP und MQ orthogonal und gleich lang sind.



Aufgabe B2

Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensystem durch die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(3|0|0)$, $D(0|5|0)$ und $F(3|0|4)$ festgelegt.
Die Fläche $EFGH$ stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar. Dieser ist drehbar um die Kante EH.
Weiterhin ist für jedes $t \geq 0$ eine Ebene gegeben durch die Gleichung E: $tx_1 - x_3 = -4$.



a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Kanten AB und GH.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt.
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel bei geschlossener Kiste?
Liegt der Deckel in einer Ebene E_t, wenn er um $90\,°$ geöffnet ist?

b) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel.
Berechnen Sie die Koordinaten von P.

c) Wie groß ist der Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt?
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel, wenn der Öffnungswinkel $60\,°$ beträgt?
Bestimmen Sie den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90°$.

d) Eine punktförmige Lichtquelle in $L(0|2{,}5|20)$ beleuchtet die Kiste. Wie weit kann man die Kiste höchstens öffnen, ohne dass Licht von L in die Kiste fällt.

Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Für die Darstellung der Ebene wandeln wir die Koordinatengleichung in die Achsenabschnittsgleichung um und bestimmen daraus die drei Spurpunkte.
Siehe Grafik.
Neigungswinkel α des Hangs:
α ist der spitze Winkel, den die gegebene Ebene E mit der x_1x_2–Koordinatenebene einschließt. Berechnung über die Formel für Schnittwinkel von Vektoren mit den Normalenvektoren der beiden Ebenen.
Verankerungspunkt V am Hang:
Dies ist der Schnittpunkt der Geraden durch die halbe Mastlänge mit dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor und der Ebene E.
Länge des Stahlseils:
Dies ist die Strecke zwischen der halben Mastspitze und dem Punkt V.

b) *Beschreibung:*
Siehe Klausuraufschrieb.

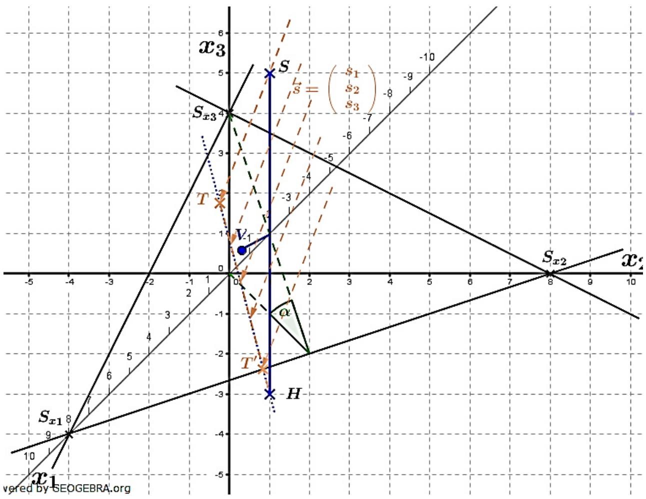
c) *Höhe, in der der Mast abgeknickt ist:*
Die Strecke $\overline{HK} + \overline{KR}$ entspricht der Länge des Mastes von $8\,m$.

Klausuraufschrieb

a) Spurpunkte von E:

E: $\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{4} = 1$

$S_{x_1}(8|0|0)$; $S_{x_2}(0|8|0)$; $S_{x_3}(0|0|4)$



Neigungswinkel des Hangs:
Spitzer Winkel zwischen der x_1x_2–Koordinatenebene und der Ebene E.

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}$

$cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \approx 35{,}26\,°$

Der Neigungswinkel des Hanges beträgt etwa $35{,}3\,°$.

Verankerungspunkt V:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$g \cap E$

$x_1 = 6 + k; \quad x_2 = 4 + k; \quad x_3 = 4 + 2k$

$6 + k + 4 + k + 2 \cdot (4 + 2k) = 8$

$18 + 6k = 8 \implies k = -\frac{5}{3}$

$$\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} - \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\\frac{7}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Verankerungspunktes sind $V\left(\frac{13}{3}\middle|\frac{7}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$.

Länge des Stahlseils:

$$l = \left|\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\\frac{7}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{10}{3}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{150} \approx 4{,}08$$

Das Stahlseil ist etwa $40{,}8\,m$ *lang.*

b) *Berechnung der Gesamtlänge des Schattens:*

Die Richtung der Lichtstrahlen ist gegeben durch die Verbindung der Spitze S des Mastes mit dem Schattenpunkt T.

Der Schatten des Mastes verläuft von H zu einem Punkt T' auf der Spurgeraden S_1S_2 der Ebene E und von dort zum Punkt T.

T liegt außerdem in der Schattenebene E^* des Mastes.

Rechenschritte:

1) Schnittpunkt T der Geraden durch S und dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen mit der Ebene E bestimmen.
2) Gleichung der Geraden s_{12} durch S_{x_1} und S_{x_2} aufstellen.
3) Gleichung der Ebene E^* durch S mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{SH}$ und $\overrightarrow{ST}$ aufstellen.
4) Schnittpunkt T' der Geraden s_{12} mit der Ebene E^* bestimmen.
5) Die Längen der Strecken $\overline{HT'}$ und $\overline{T'T}$ berechnen.
   $\left|\overrightarrow{HT'}\right| + \left|\overrightarrow{T'T}\right|$ ist die Gesamtlänge des Schattens.

c) *Höhe, in der der Mast abgeknickt ist:*

$|\overrightarrow{HK}| + |\overrightarrow{KR}| = 8$

$$\left|\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-2\\-4\\2-k\end{pmatrix}\right| = 8$$

$k + \sqrt{20 + 4 - 4k + k^2} = 8$

$\sqrt{24 - 4k + k^2} = 8 - k \qquad |\ {}^2$

$k^2 - 4k + 24 = k^2 - 16k + 64$

$12k = 40 \implies k = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$

Der Mast knickt in einer Höhe von $33{,}3\,m$ *um.*

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

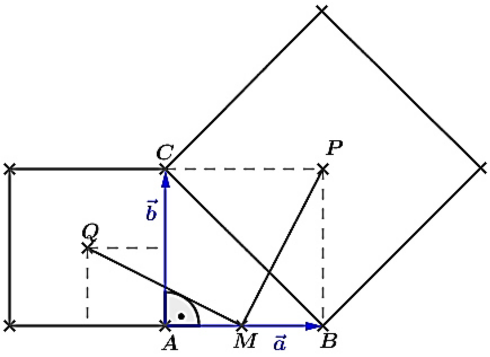
Lösung B1.2

Klausuraufschrieb

Da das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist, gilt für die Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ sowie $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

Das Viereck $ABPC$ ist ein Quadrat, da die Winkel ABC und ACB jeweils $45°$ sind.



Damit ergibt sich:

$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ und

$\overrightarrow{MQ} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Nachweis der Orthogonalität:

$$\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{a \cdot b} - \frac{1}{4}\overrightarrow{a \cdot b} + \frac{1}{2}\vec{a}^2 = 0$$

Die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ sind somit orthogonal.

Streckenlängen:

$$\overrightarrow{MP} = \sqrt{\overrightarrow{MP}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \sqrt{\overrightarrow{MQ}^2} = \sqrt{\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - \vec{a} \circ \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2}$$

Gemäß Aufgabenstellung haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche Länge d, d.h. es gilt:

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = d$ bzw. $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = d^2$

Damit sehen wir:

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot d^2} = |\overrightarrow{MQ}|$$

Die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ sind somit gleich lang.

Lösung B3

Klausuraufschrieb

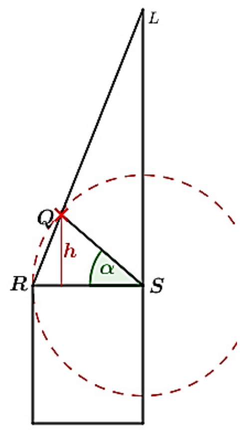
a) *Abstand zwischen den Kanten AB und GH:*
Der Abstand entspricht der Diagonalen des Rechtecks $BCGF$ bzw. $ADHE$.
Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t:
Wir bilden $E_t \cap g_{EH}$ und prüfen, ob das Ergebnis unabhängig von t ist.
E_t bei geschlossenem Deckel:
Der geschlossene Deckel liegt in der Parallelebene zur x_1x_2–Koordinatenebene im Abstand $\overline{AE}$.
E_t bei um 90° geöffneten Deckel:
Der um $90°$ geöffnete Deckel liegt in der x_2x_3–Koordinatenebene.

b) *Koordinaten von Punkt P:*
Der Punkt P ist der Schnittpunkt der Geraden durch $\frac{\overline{FE}}{2}$ mit dem Normalenvektor von E_2 als Richtungsvektor mit der Ebene E_2

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

c) *Öffnungswinkel für E_2:*
Dies ist der spitze Winkel, den E_2 mit der x_1x_2–Koordinatenebene einschließt.
E_t für Öffnungswinkel $\alpha = 60°$:
Öffnungswinkel $60°$ bedeutet, dass die Winkelberechnung zwischen E_t und der x_1x_2–Koordinatenebene den Wert $0{,}5$ hat.
Ermittlung von t für Öffnungswinkel $0° \leq \alpha < 90°$
Für $\alpha < 90°$ gilt, dass $0 \leq cos\alpha \leq 1$ sein muss.

d) *Maximaler Öffnungswinkel der Kiste:*
Die Lampe ist in x_2–Richtung genau in der Mitte der Kiste bei $x_2 = 2{,}5$ aufgehängt. Der äußere Lichtkegel, von dem aus noch Licht in die Kiste fallen kann, ist in nebenstehender Skizze durch die Strecke $\overline{LR}$ dargestellt. Der Punkt Q liegt auf der Vorderkante des Deckels. Licht kann ab dem Moment in die Kiste einfallen, ab dem der Punkt Q durch die Deckeldrehung sich rechts des Strahleneinfalls - gekennzeichnet durch $\overline{LR}$ - befindet. Die Grenze ist also dort, wo sich der Punkt Q auf der Geraden durch L und R befindet.



Powered by GEOGEBRA.org

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) *Abstand zwischen den Kanten AB und GH:*
$H(0|5|4)$

$$d = |\overrightarrow{AH}| = \left|\begin{pmatrix}0\\5\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{41} = 6{,}4$$

Abstand zwischen den Kanten AB und GH beträgt $6{,}4\ LE$.
Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t:
$E(0|0|4)$

$$g_{EH}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + k^* \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$E_t \cap g_{EH}$
(1) $x_1 = 0$
(2) $x_2 = k$
(3) $x_3 = 4$
$t \cdot 0 - 4 = -4$
Die Ebenengleichung von E_t ist für alle g_{EH} erfüllt, die Gerade g_{EH} liegt in allen E_t.
E_t bei geschlossenem Deckel:
Bei geschlossenem Deckel ist $E_t \parallel x_1x_2$-Koordinatenebene im Abstand 4, somit
$E_0:\ x_3 = 4$
E_t bei um 90° geöffneten Deckel:
Bei um 90° geöffneten Deckel liegt dieser in der x_2x_3-Koordinatenebene. Diese hat die Gleichung $H:\ x_1 = 0$
Es existiert kein t, sodass $E_t = H$ ist.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

b) *Koordinaten von Punkt P:*

E_2: $2x_1 - x_3 = -4$

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_{QP}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 1,5 + 2k; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 4 - k$

$E_2 \cap g_{QP}$

$2 \cdot (1,5 + 2k) - 4 + k = -4$

$3 + 5k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{3}{5}$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 4,6 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(0,3|0|4,6)$.

c) *Öffnungswinkel für E_2:*

$$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_2} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) \approx 63,4°$

Der Öffnungswinkel für E_2 beträgt $63,4°$.

E_t für Öffnungswinkel $\alpha = 60°$:

$$\overrightarrow{n_t} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad cos(60°) = 0,5$$

$$0,5 = \frac{\left|\overrightarrow{n_t} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_t}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

$0,5 \cdot \sqrt{t^2+1} = 1$

$\sqrt{t^2+1} = 2 \qquad |\ ^2$

$t^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \sqrt{3}; \quad t_2 = -\sqrt{3}$

Wegen $t > 0$ ist $t = \sqrt{3}$ die einzigste Lösung.

Der Öffnungswinkel beträgt $60°$ für Ebene $E_{\sqrt{3}}$

Ermittlung von t für Öffnungswinkel $0° \leq \alpha < 90°$

$$cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{t^2+1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad \Longrightarrow \quad t^2 + 1 = \frac{1}{cos^2(\alpha)}$$

Wegen $t \geq 0$ gilt: $t = \sqrt{\frac{1}{cos^2(\alpha)} - 1}; \ 0° \leq \alpha < 90°$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

d) *Maximaler Öffnungswinkel der Kiste:*

Koordinaten von $R(3|2{,}5|4)$

$g_{\overline{LR}}\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OL} + t \cdot \overrightarrow{LR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$

Koordinaten von $Q(3t|2{,}5|20-16t)$

Die Strecke $\overline{QS}$ entspricht der Breite der Kiste mit $3\,LE$.

Koordinaten von $S(0|2{,}5|4)$. Damit gilt:

$\left|\overrightarrow{QS}\right| = 3 = \sqrt{(0-3t)^2 + \left(4-(20-16t)\right)^2}$

$265t^2 - 512t + 247 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 0;\ \ t_2 \approx 0{,}93$

$t_1 = 0$ ist der Wert für Q in R (Deckel geschlossen), $t_2 \approx 0{,}93$ ist der Wert für Q auf $\overline{LR}$.

$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 20 \end{pmatrix} + 0{,}93 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}796 \\ 2{,}5 \\ 5{,}087 \end{pmatrix}$

Hieraus ergibt sich die Strecke h (siehe Skizze) mit $h \approx 5{,}087 - 4 = 1{,}087$. Es gilt nun $sin(\alpha) = \frac{h}{3} \approx 0{,}362;\ \ \alpha \approx 21{,}24\,°$

Der maximale Öffnungswinkel beträgt ca. $21{,}24\,°$.