Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Darstellung in Koordinatensystem:*
Für die Darstellung der Ebene wandeln wir die Koordinatengleichung in die Achsenabschnittsgleichung um und bestimmen daraus die drei Spurpunkte. Siehe Grafik.
Neigungswinkel α des Hangs:
α ist der spitze Winkel, den die gegebene Ebene E mit der x_1x_2–Koordinatenebene einschließt. Berechnung über die Formel für Schnittwinkel von Vektoren mit den Normalenvektoren der beiden Ebenen.
Verankerungspunkt V am Hang:
Dies ist der Schnittpunkt der Geraden durch die halbe Mastlänge mit dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor und der Ebene E.
Länge des Stahlseils:
Dies ist die Strecke zwischen der halben Mastspitze und dem Punkt V.

b) *Beschreibung:*
Siehe Klausuraufschrieb.

c) *Höhe, in der der Mast abgeknickt ist:*
Die Strecke $\overline{HK} + \overline{KR}$ entspricht der Länge des Mastes von $8\,m$.

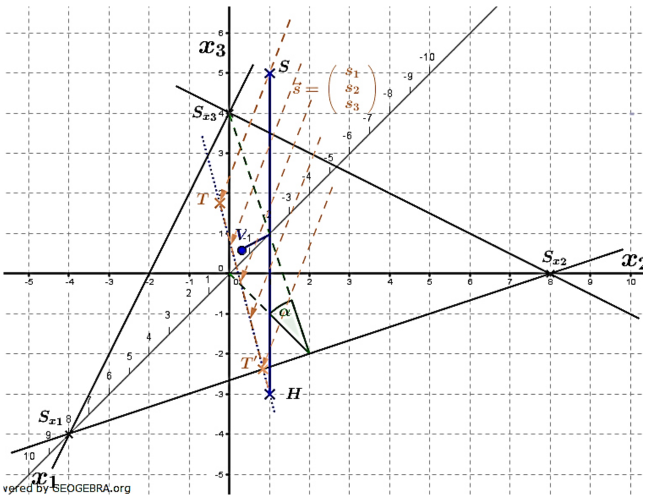
Klausuraufschrieb

a) Spurpunkte von E:

E: $\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{4} = 1$

$S_{x_1}(8|0|0)$; $S_{x_2}(0|8|0)$; $S_{x_3}(0|0|4)$

Neigungswinkel des Hangs:
Spitzer Winkel zwischen der x_1x_2–Koordinatenebene und der Ebene E.



$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}$$

$$cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) \approx 35{,}26\,°$$

Der Neigungswinkel des Hanges beträgt etwa $35{,}3\,°$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

Verankerungspunkt V:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$g \cap E$

$x_1 = 6 + k; \quad x_2 = 4 + k; \quad x_3 = 4 + 2k$

$6 + k + 4 + k + 2 \cdot (4 + 2k) = 8$

$18 + 6k = 8 \implies k = -\frac{5}{3}$

$$\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} - \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\ \frac{7}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Verankerungspunktes sind $V\left(\frac{13}{3}\middle|\frac{7}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$.

Länge des Stahlseils:

$$l = \left|\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\ \frac{7}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{150} \approx 4{,}08$$

Das Stahlseil ist etwa $40{,}8\,m$ *lang.*

b) *Berechnung der Gesamtlänge des Schattens:*

Die Richtung der Lichtstrahlen ist gegeben durch die Verbindung der Spitze S des Mastes mit dem Schattenpunkt T.
Der Schatten des Mastes verläuft von H zu einem Punkt T' auf der Spurgeraden S_1S_2 der Ebene E und von dort zum Punkt T.
T liegt außerdem in der Schattenebene E^* des Mastes.
Rechenschritte:

1) Schnittpunkt T der Geraden durch S und dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen mit der Ebene E bestimmen.
2) Gleichung der Geraden s_{12} durch S_{x_1} und S_{x_2} aufstellen.
3) Gleichung der Ebene E^* durch S mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{SH}$ und $\overrightarrow{ST}$ aufstellen.
4) Schnittpunkt T' der Geraden s_{12} mit der Ebene E^* bestimmen.
5) Die Längen der Strecken $\overline{HT'}$ und $\overline{T'T}$ berechnen.
   $\left|\overrightarrow{HT'}\right| + \left|\overrightarrow{T'T}\right|$ ist die Gesamtlänge des Schattens.

c) *Höhe, in der der Mast abgeknickt ist:*

$|\overrightarrow{HK}| + |\overrightarrow{KR}| = 8$

$$\left|\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-2\\-4\\2-k\end{pmatrix}\right| = 8$$

$k + \sqrt{20 + 4 - 4k + k^2} = 8$

$\sqrt{24 - 4k + k^2} = 8 - k \quad |\ ^2$

$k^2 - 4k + 24 = k^2 - 16k + 64$

$12k = 40 \implies k = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$

Der Mast knickt in einer Höhe von $33{,}3\,m$ *um.*

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

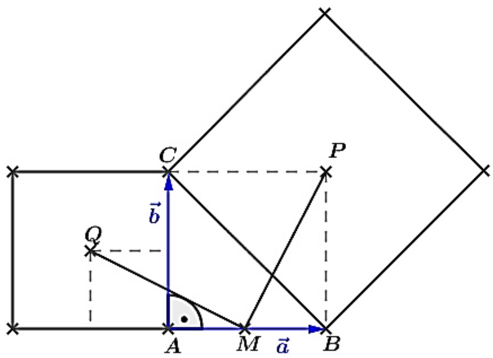
Lösung B1.2

Klausuraufschrieb

Da das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist, gilt für die Vektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ sowie $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

Das Viereck $ABPC$ ist ein Quadrat, da die Winkel ABC und ACB jeweils $45°$ sind.



Damit ergibt sich:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \quad \text{und}$$

$$\overrightarrow{MQ} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

Nachweis der Orthogonalität:

$$\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}^2 = 0$$

Die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ sind somit orthogonal.

Streckenlängen:

$$\overrightarrow{MP} = \sqrt{\overrightarrow{MP}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \sqrt{\overrightarrow{MQ}^2} = \sqrt{\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - \vec{a} \circ \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2}$$

Gemäß Aufgabenstellung haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche Länge d, d.h. es gilt:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = d \quad \text{bzw.} \quad \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = d^2$$

Damit sehen wir:

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot d^2} = |\overrightarrow{MQ}|$$

Die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ sind somit gleich lang.

Lösung B3

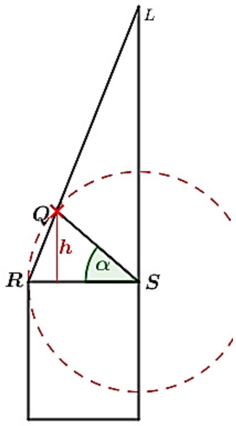
Klausuraufschrieb

a) *Abstand zwischen den Kanten AB und GH:*
Der Abstand entspricht der Diagonalen des Rechtecks $BCGF$ bzw. $ADHE$.
Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t:
Wir bilden $E_t \cap g_{EH}$ und prüfen, ob das Ergebnis unabhängig von t ist.
E_t bei geschlossenem Deckel:
Der geschlossene Deckel liegt in der Parallelebene zur x_1x_2–Koordinatenebene im Abstand $\overline{AE}$.
E_t bei um 90° geöffneten Deckel:
Der um $90°$ geöffnete Deckel liegt in der x_2x_3–Koordinatenebene.

b) *Koordinaten von Punkt P:*
Der Punkt P ist der Schnittpunkt der Geraden durch $\frac{\overline{FE}}{2}$ mit dem Normalen-vektor von E_2 als Richtungsvektor mit der Ebene E_2

c) *Öffnungswinkel für E_2:*
Dies ist der spitze Winkel, den E_2 mit der x_1x_2–Koordinatenebene einschließt.
E_t für Öffnungswinkel $\alpha = 60°$:
Öffnungswinkel $60°$ bedeutet, dass die Winkelberechnung zwischen E_t und der x_1x_2–Koordinatenebene den Wert $0{,}5$ hat.
Ermittlung von t für Öffnungswinkel $0° \leq \alpha < 90°$
Für $\alpha < 90°$ gilt, dass $0 \leq cos\alpha \leq 1$ sein muss.

d) *Maximaler Öffnungswinkel der Kiste:*
Die Lampe ist in x_2–Richtung genau in der Mitte der Kiste bei $x_2 = 2{,}5$ aufgehängt. Der äußere Lichtkegel, von dem aus noch Licht in die Kiste fallen kann, ist in nebenstehender Skizze durch die Strecke $\overline{LR}$ dargestellt. Der Punkt Q liegt auf der Vorderkante des Deckels. Licht kann ab dem Moment in die Kiste einfallen, ab dem der Punkt Q durch die Deckeldrehung sich rechts des Strahleneinfalls - gekennzeichnet durch $\overline{LR}$ - befindet. Die Grenze ist also dort, wo sich der Punkt Q auf der Geraden durch L und R befindet.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

a) *Abstand zwischen den Kanten AB und GH:*
$H(0|5|4)$
$$d = |\overrightarrow{AH}| = \left|\begin{pmatrix}0\\5\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{41} = 6{,}4$$
Abstand zwischen den Kanten AB und GH beträgt $6{,}4\ LE$.
Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t:
$E(0|0|4)$
$$g_{EH}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + k^*\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$E_t \cap g_{EH}$
(1) $x_1 = 0$
(2) $x_2 = k$
(3) $x_3 = 4$
$t\cdot 0 - 4 = -4$
Die Ebenengleichung von E_t ist für alle g_{EH} erfüllt, die Gerade g_{EH} liegt in allen E_t.
E_t bei geschlossenem Deckel:
Bei geschlossenem Deckel ist $E_t \parallel x_1x_2$-Koordinatenebene im Abstand 4, somit
$E_0:\ x_3 = 4$
E_t bei um 90° geöffneten Deckel:
Bei um 90° geöffneten Deckel liegt dieser in der x_2x_3-Koordinatenebene. Diese hat die Gleichung $H:\ x_1 = 0$
Es existiert kein t, sodass $E_t = H$ ist.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

b) *Koordinaten von Punkt P:*

E_2: $2x_1 - x_3 = -4$

$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

g_{QP}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x_1 = 1{,}5 + 2k; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 4 - k$

$E_2 \cap g_{QP}$

$2 \cdot (1{,}5 + 2k) - 4 + k = -4$

$3 + 5k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{3}{5}$

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0 \\ 4{,}6 \end{pmatrix}$

Der Punkt hat die Koordinaten $P(0{,}3|0|4{,}6)$.

c) *Öffnungswinkel für E_2:*

$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_2} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_2}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) \approx 63{,}4°$

Der Öffnungswinkel für E_2 beträgt $63{,}4°$.

E_t für Öffnungswinkel $\alpha = 60°$:

$\overrightarrow{n_t} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad cos(60°) = 0{,}5$

$0{,}5 = \frac{|\overrightarrow{n_t} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_t}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

$0{,}5 \cdot \sqrt{t^2 + 1} = 1$

$\sqrt{t^2 + 1} = 2 \quad |\ ^2$

$t^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{3}; \quad t_2 = -\sqrt{3}$

Wegen $t > 0$ ist $t = \sqrt{3}$ die einzigste Lösung.

Der Öffnungswinkel beträgt $60°$ für Ebene $E_{\sqrt{3}}$

Ermittlung von t für Öffnungswinkel $0° \leq \alpha < 90°$

$cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{t^2+1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad \Rightarrow \quad t^2 + 1 = \frac{1}{cos^2(\alpha)}$

Wegen $t \geq 0$ gilt: $t = \sqrt{\frac{1}{cos^2(\alpha)} - 1}; \quad 0° \leq \alpha < 90°$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2007 BW

d) *Maximaler Öffnungswinkel der Kiste:*

Koordinaten von $R(3|2{,}5|4)$

$g_{\overline{LR}}$: $\vec{x} = \overrightarrow{OL} + t \cdot \overrightarrow{LR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$

Koordinaten von $Q(3t|2{,}5|20 - 16t)$

Die Strecke $\overline{QS}$ entspricht der Breite der Kiste mit $3\ LE$.

Koordinaten von $S(0|2{,}5|4)$. Damit gilt:

$\left|\overrightarrow{QS}\right| = 3 = \sqrt{(0 - 3t)^2 + \left(4 - (20 - 16t)\right)^2}$

$265t^2 - 512t + 247 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0;\ \ t_2 \approx 0{,}93$

$t_1 = 0$ ist der Wert für Q in R (Deckel geschlossen), $t_2 \approx 0{,}93$ ist der Wert für Q auf $\overline{LR}$.

$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 20 \end{pmatrix} + 0{,}93 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}796 \\ 2{,}5 \\ 5{,}087 \end{pmatrix}$

Hieraus ergibt sich die Strecke h (siehe Skizze) mit $h \approx 5{,}087 - 4 = 1{,}087$. Es gilt nun $sin(\alpha) = \frac{h}{3} \approx 0{,}362;\ \ \alpha \approx 21{,}24\,°$

Der maximale Öffnungswinkel beträgt ca. $21{,}24\,°$*.*