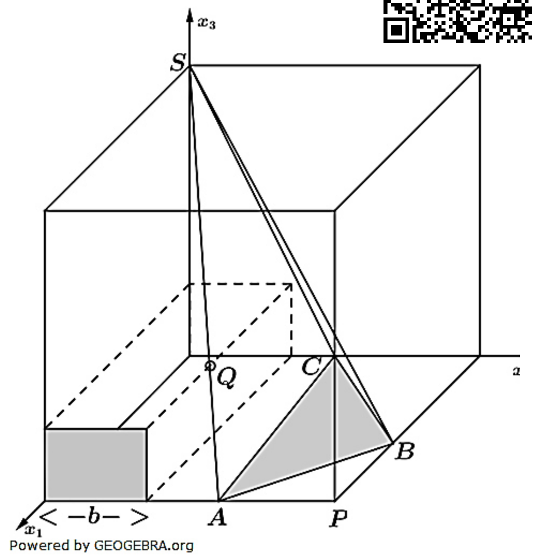
Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

Aufgabe B1



In einem Würfel mit den Eckpunkten $O(0|0|0)$, $P(10|10|0)$ und $S(0|0|10)$ befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze).
Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind $A(10|6|0)$, $B(6|10|0)$ und $C(10|10|5)$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Grundfläche der Pyramide liegt.
Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?
Untersuchen Sie, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.
(Teilergebnis: $E: 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$)

b) Wie viel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen?

c) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze).
Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b = 4$?
Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist?

Aufgabe B2.1

Die Punkte $A(5|0|0)$, $B(5|3|0)$, $C(5|0|4)$, $F(0|0|0)$, $G(0|3|0)$ und $H(0|0|4)$ sind die Ecken eines dreiseitigen Prismas mit Grundfläche ABC.

a) Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Fläche $BGHC$ liegt.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1x_2-Ebene?
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden CG.
(Teilergebnis: E: $4x_2 + 3x_3 = 12$)

b) Im Prisma liegt ein Zylinder mit Radius $0{,}5$ und Grundkreismittelpunkt $M[0|0{,}5|0{,}5)$, dessen Achse parallel zur x_1-Achse verläuft.
Ermitteln Sie die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.
Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas?
Ein anderer Zylinder mit Radius r und Grundkreismittelpunkt $M^*(0|r|r)$, dessen Achse ebenfalls parallel zur x_1-Achse ist, soll alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas von innen berühren.
Bestimmen Sie den Radius r dieses Zylinders.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

<u>Aufgabe B2.2</u> (nicht mehr prüfungsrelevant)

In einem Viereck $ABCD$ gilt für die Diagonale AC: $\overrightarrow{AC} = 0{,}4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Zeichnen Sie ein solches Viereck $ABCD$.
In welchem Verhältnis wird die Diagonale AC von der anderen Diagonale geteilt?

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bilden den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ und daraus die Koordinatengleichung mit einer Punktprobe mit A.
Winkel zwischen E und x_1x_2–Koordinatenebene:
Den Winkel zwischen den Grundflächen von Pyramide und Würfel ermitteln wir über den Schnittwinkel der Normalenvektoren.
Höhe der Pyramide auf Diagonalen $\overrightarrow{PS}$:
Der Vektor $\overrightarrow{AS}$ muss ein Vielfaches des Normalenvektors der Ebene sein, dann liegt die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen des Würfels.

b) *Volumen der Pyramide:*
Das Pyramidenvolumen errechnet sich aus einem Sechstel des Betrages des Spatproduktes der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$. Der prozentuale Anteil ist der Quotient aus Pyramidenvolumen und Würfelvolumen.

c) *Volumen des Quaders für $b = 4$:*
Zu bestimmen ist die Höhe h des Quaders. Hierzu schneiden wir die Gerade durch die Punkte A und S mit einer zur x_1x_3–Koordinatenebene parallelen Ebene im Abstand $x_2 = b$. Die x_3–Koordinate des Schnittpunktes entspricht dann der Höhe h des Quaders.
Volumen des Quaders für b variabel:
Für die variable Breite b des Quaders ermitteln wir die x_3–Koordinate des Schnittpunktes wie vor in Abhängigkeit von b. Das damit ermittelte Volumen des Quaders ist dann eine Funktion von b mit einem Maximum, welches per GTR bestimmt wird.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = d$

$E\colon\ 5 \cdot 10 + 5 \cdot 6 - 4 \cdot 0 = d \ \Rightarrow\ d = 80$ | Punktprobe mit A

$E\colon\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$ **q.e.d.**

Winkel zwischen E und x_1x_2–Koordinatenebene:

$$\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{1}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right) = 60{,}5\,°$$

Der Winkel zwischen E und der x_1x_2–Koordinatenebene beträgt $60{,}5\,°$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

Höhe der Pyramide auf Diagonalen $\overline{PS}$

$k \cdot \overrightarrow{n_E} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{PS}$

$k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{PS}$ ist kein Vielfaches des Normalenvektors von E, also liegt die Höhe der Pyramie nicht auf der Diagonalen $\overline{PS}$ des Würfels.

b) *Volumen der Pyramide:*

$V_{Pyr} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}\right|$

$V_{Pyr} = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot |-200 - 120 - 160| = \frac{1}{6} \cdot 480 = 80$

$V_{Würfel} = 1000$

$\frac{V_{Pyr}}{V_{Würfelv}} = \frac{80}{1000} = 0{,}08 = 8\,\%$

Das Pyramidenvolumen beträgt $8\,\%$ des Würfelvolumens.

c) *Volumen des Quaders für $b = 4$:*

$V_{Qu} = a \cdot b \cdot c$ mit $a = 10$, $b = 4$ und $c = x_{3_Q}$.

Berechnung der Koordinaten von Q:

Q ist der Schnittpunkt der Geraden durch A und S mit der zur x_1x_3–Koordinatenebene parallelen Ebene im Abstand $b = 4$.

$g_{AS}: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r^* \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$E_H: \quad x_2 = 4$

$g_{AS} \cap E_H$

$x_{2_g} = 6 + 3r$

$6 + 3r = 4 \Longrightarrow \; r = -\frac{2}{3}$

$x_{3_g} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-5) = \frac{10}{3}$

$V_{Qu} = 10 \cdot 4 \cdot \frac{10}{3} = \frac{400}{3}$

Das Volumen des Quaders beträgt $133{,}3\,VE$.

Volumen des Quaders für b variabel

$E_H: \quad x_2 = b$

$g_{AS} \cap E_H$

$x_{2_g} = 6 + 3r$

$6 + 3r = b \Longrightarrow \; r = \frac{b-6}{3}$

$x_{3_g} = \left(\frac{b-6}{3}\right) \cdot (-5) = 10 - \frac{5}{3}b$

$V_{Qu}(b) = 10 \cdot b \cdot \left(10 - \frac{5}{3}b\right) = -\frac{50}{3}b^2 + 100b$

$V_{Qu}(b)_{max} \stackrel{\text{GTR}}{=} 150$ für $b \stackrel{\text{GTR}}{=} 3$

Das Volumen des Quaders für ein variables b ist $0 < V_{Qu} \leq 150$ für $0 < b < 6$.

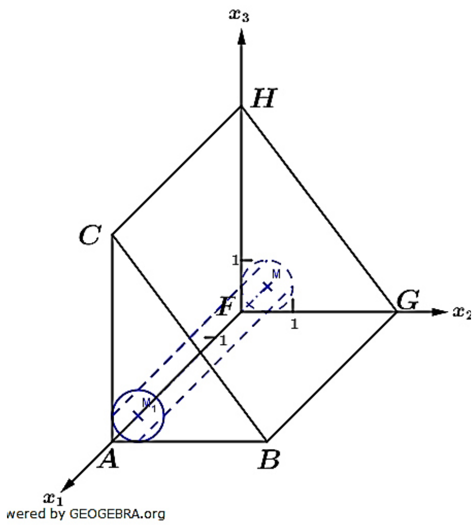
Das maximale Volumen beträgt $150\,VE$ für $b = 3$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Prisma in Koordinatensystem:*
Siehe Grafik.



Koordinatengleichung der Ebene, in der die Fläche $BGHC$ liegt:
Von der Ebene sind die beiden Spurpunkte G und H bekannt. Die Ebene verläuft parallel zur x_1–Achse. Wir stellen die Achsenabschnittsform der Ebene und daraus die Koordinatengleichung auf.
Winkel zwischen E_{BGHC} und x_1x_2–Ebene:
Den Winkel ermitteln wir über den Schnittwinkel der Normalenvektoren.
Abstand Punkt A von der Geraden CG:
Berechnung über die Abstandsformel Punkt/Gerade.

b) *Abstand $M(0|0{,}5|0{,}5)$ von den Seitenflächen:*
Wir bilden den Abstand Punkt/Ebene über die HNF.
Gleicher Abstand $M^*(0|r|r)$ von den Seitenflächen:
Den Mittelpunkt M^* errechnen wir ebenfalls über den Abstand Punkt/Ebene (HNF), wobei die drei Abstände gleich groß sein müssen.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene, in der die Fläche $BGHC$ liegt:*
Spurpunkte der Ebene E_{BGHC} sind $G(0|3|0)$ und $H(0|0|4)$.

$$E_{BGHC}: \quad \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 1$$

$$E_{BGHC}: \quad 4x_2 + 3x_3 = 12 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen E_{BGHC} und x_1x_2–Ebene:

$$\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13\ °$$

Der Winkel zwischen E und der x_1x_2–Koordinatenebene beträgt $53{,}1\ °$.
Abstand Punkt A zur Geraden CG:

$$g_{CG}: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \overrightarrow{CG}$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CG}|}{|\overrightarrow{CG}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{544}}{\sqrt{50}} \approx 3{,}298$$

Der Abstand von Punkt A zur Geraden CG beträgt etwa $3{,}3\ LE$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

b) *Abstand $M(0|0{,}5|0{,}5)$ von den Seitenflächen:*

Abstand M von E_{BGHC} über die HNF:

$d_{E_{BGHC}} = \frac{|4\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}5-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-8{,}5|}{5} = 1{,}7$

Abstand M von E_{ABGF} ($=x_1x_2$-Koordinatenebene) über die HNF:

$d_{E_{ABGF}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1}} = 0{,}5$

Abstand M von E_{ACHF} ($=x_1x_3$-Koordinatenebene) wie $d_{E_{ABGF}} = 0{,}5$

Der Zylinder berührt nur zwei Seitenflächen, er berührt nicht die Seitenfläche $BGHC$.

Gleicher Abstand $M^*(0|r|r)$ von den Seitenflächen:

Abstand M^* von E_{BGHC} über die HNF: $d_{E_{BGHC}} = \frac{|4\cdot r+3\cdot r-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|7r-12|}{5}$

Abstand M^* von E_{ABGF} ($=x_1x_2$-Koordinatenebene) über die HNF:

$d_{E_{ABGF}} = \frac{|r|}{\sqrt{1}} = |r|$ $\qquad d_{E_{BGHC}} = d_{E_{ABGF}}$

$\frac{|7r-12|}{5} = r \implies |7r-12| = 5r$

$7r_1 - 12 = 5r_1 \implies r_1 = 6$ $\qquad 7r_2 - 12 = -5r_2 \implies r_2 = 1$

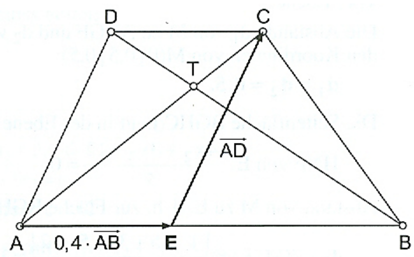
Die Lösung $r_1 = 6$ entfällt, da dann der Mittelpunkt M^* außerhalb des Prismas liegen würde.

Der Radius des Zylinders, der alle drei Seitenflächen berührt beträgt $1\,LE$.

Lösung B2. 2

Klausuraufschrieb

Nachdem wir das Viereck $ABCD$ gezeichnet haben, ziehen wir eine Parallele zu $\overline{AD}$ durch C und erhalten dadurch das Parallelogramm $AECD$ (siehe nebenstehende Abbildung).



Einfachste Lösung:

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{AB}}{0{,}4\cdot\overline{AB}} = \frac{1}{0{,}4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Die Diagonale $\overline{AC}$ wird von der anderen Diagonalen im Verhältnis $5:2$ geteilt.

Die (umständlichere) vektorielle Lösung:

$$\overrightarrow{AC} = 0{,}4\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Wir betrachten nun den geschlossenen Vektorzug $ATBA$.

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA} = \vec{o}$$

Mit den beiden linear unabhängigen Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ ergibt sich:

$$\overrightarrow{AT} = r\cdot\left(0{,}4\vec{a}+\vec{b}\right);\ \overrightarrow{TB} = s\cdot\overrightarrow{DB} = s\cdot\left(-\vec{b}+\vec{a}\right);\ \overrightarrow{BA} = -\vec{a}$$

Einsetzen in die obige Gleichung:

$$r\cdot\left(0{,}4\vec{a}+\vec{b}\right) + s\cdot\left(-\vec{b}+\vec{a}\right) - \vec{a} = \vec{o}$$

$$\vec{a}\cdot(0{,}4r+s-1) + \vec{b}\cdot(r-s) = \vec{o}$$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, muss gelten:

(1) $0{,}4r + s - 1 = 0$

(2) $r - s = 0 \implies r = s \longrightarrow (1)$

(1) $0{,}4s + s - 1 = 0 \implies s = \frac{1}{1{,}4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7};\ r = \frac{5}{7}$

Die Strecke $\overline{AC} = \frac{7}{7}$ ist also in $\overline{AT} = \frac{5}{7}$ und $\overline{TC} = \frac{2}{7}$ Teile unterteilt. Das Verhältnis $\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}}$ beträgt $5:2$.