Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bilden den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ und daraus die Koordinatengleichung mit einer Punktprobe mit A.
Winkel zwischen E und x_1x_2–Koordinatenebene:
Den Winkel zwischen den Grundflächen von Pyramide und Würfel ermitteln wir über den Schnittwinkel der Normalenvektoren.
Höhe der Pyramide auf Diagonalen $\overrightarrow{PS}$:
Der Vektor $\overrightarrow{AS}$ muss ein Vielfaches des Normalenvektors der Ebene sein, dann liegt die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen des Würfels.

b) *Volumen der Pyramide:*
Das Pyramidenvolumen errechnet sich aus einem Sechstel des Betrages des Spatproduktes der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$. Der prozentuale Anteil ist der Quotient aus Pyramidenvolumen und Würfelvolumen.

c) *Volumen des Quaders für $b = 4$:*
Zu bestimmen ist die Höhe h des Quaders. Hierzu schneiden wir die Gerade durch die Punkte A und S mit einer zur x_1x_3–Koordinatenebene parallelen Ebene im Abstand $x_2 = b$. Die x_3–Koordinate des Schnittpunktes entspricht dann der Höhe h des Quaders.
Volumen des Quaders für b variabel:
Für die variable Breite b des Quaders ermitteln wir die x_3–Koordinate des Schnittpunktes wie vor in Abhängigkeit von b. Das damit ermittelte Volumen des Quaders ist dann eine Funktion von b mit einem Maximum, welches per GTR bestimmt wird.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = d$

$E\colon\ 5 \cdot 10 + 5 \cdot 6 - 4 \cdot 0 = d \ \Rightarrow \ d = 80$ | Punktprobe mit A

$E\colon\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$ **q.e.d.**

Winkel zwischen E und x_1x_2–Koordinatenebene:

$$\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{\sqrt{66} \cdot \sqrt{1}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right) = 60{,}5\,°$$

Der Winkel zwischen E und der x_1x_2–Koordinatenebene beträgt $60{,}5\,°$.

Höhe der Pyramide auf Diagonalen $\overrightarrow{PS}$

$k \cdot \overrightarrow{n_E} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{PS}$

$k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{PS}$ ist kein Vielfaches des Normalenvektors von E, also liegt die Höhe der Pyramie nicht auf der Diagonalen $\overline{PS}$ des Würfels.

b) *Volumen der Pyramide:*

$V_{Pyr} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \circ \overrightarrow{AS} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} \right|$

$V_{Pyr} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-200 - 120 - 160| = \frac{1}{6} \cdot 480 = 80$

$V_{Würfel} = 1000$

$\frac{V_{Pyr}}{V_{Würfelv}} = \frac{80}{1000} = 0{,}08 = 8\ \%$

Das Pyramidenvolumen beträgt $8\ \%$ des Würfelvolumens.

c) *Volumen des Quaders für $b = 4$:*

$V_{Qu} = a \cdot b \cdot c$ mit $a = 10$, $b = 4$ und $c = x_{3_Q}$.

Berechnung der Koordinaten von Q:

Q ist der Schnittpunkt der Geraden durch A und S mit der zur x_1x_3–Koordinatenebene parallelen Ebene im Abstand $b = 4$.

$g_{AS}: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r^* \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$E_H: \quad x_2 = 4$

$g_{AS} \cap E_H$

$x_{2_g} = 6 + 3r$

$6 + 3r = 4 \Longrightarrow \quad r = -\frac{2}{3}$

$x_{3_g} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-5) = \frac{10}{3}$

$V_{Qu} = 10 \cdot 4 \cdot \frac{10}{3} = \frac{400}{3}$

Das Volumen des Quaders beträgt $133{,}3\ VE$.

Volumen des Quaders für b variabel

$E_H: \quad x_2 = b$

$g_{AS} \cap E_H$

$x_{2_g} = 6 + 3r$

$6 + 3r = b \Longrightarrow \quad r = \frac{b-6}{3}$

$x_{3_g} = \left(\frac{b-6}{3}\right) \cdot (-5) = 10 - \frac{5}{3}b$

$V_{Qu}(b) = 10 \cdot b \cdot \left(10 - \frac{5}{3}b\right) = -\frac{50}{3}b^2 + 100b$

$V_{Qu}(b)_{max} \stackrel{GTR}{=} 150$ für $b \stackrel{GTR}{=} 3$

Das Volumen des Quaders für ein variables b ist $0 < V_{Qu} \leq 150$ für $0 < b < 6$.

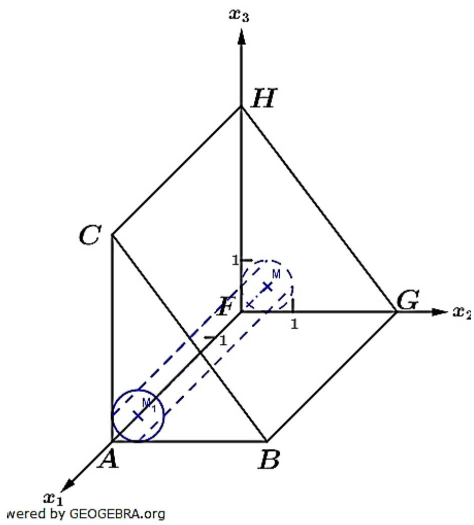
Das maximale Volumen beträgt $150\ VE$ für $b = 3$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Prisma in Koordinatensystem:*
Siehe Grafik.
Koordinatengleichung der Ebene, in der die Fläche $BGHC$ liegt:
Von der Ebene sind die beiden Spurpunkte G und H bekannt. Die Ebene verläuft parallel zur x_1–Achse. Wir stellen die Achsenabschnittsform der Ebene und daraus die Koordinatengleichung auf.
Winkel zwischen E_{BGHC} und x_1x_2–Ebene:
Den Winkel ermitteln wir über den Schnittwinkel der Normalenvektoren.
Abstand Punkt A von der Geraden CG:
Berechnung über die Abstandsformel Punkt/Gerade.



b) *Abstand $M(0|0{,}5|0{,}5)$ von den Seitenflächen:*
Wir bilden den Abstand Punkt/Ebene über die HNF.
Gleicher Abstand $M^*(0|r|r)$ von den Seitenflächen:
Den Mittelpunkt M^* errechnen wir ebenfalls über den Abstand Punkt/Ebene (HNF), wobei die drei Abstände gleich groß sein müssen.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene, in der die Fläche $BGHC$ liegt:*
Spurpunkte der Ebene E_{BGHC} sind $G(0|3|0)$ und $H(0|0|4)$.

$$E_{BGHC}: \quad \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 1$$

$$E_{BGHC}: \quad 4x_2 + 3x_3 = 12 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen E_{BGHC} und x_1x_2–Ebene:

$$\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13\ °$$

Der Winkel zwischen E und der x_1x_2–Koordinatenebene beträgt $53{,}1\ °$.
Abstand Punkt A zur Geraden CG:

$$g_{CG}: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \overrightarrow{CG}$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CG}\,|}{|\overrightarrow{CG}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{544}}{\sqrt{50}} \approx 3{,}298$$

Der Abstand von Punkt A zur Geraden CG beträgt etwa $3{,}3\ LE$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2008 BW

b) *Abstand $M(0|0{,}5|0{,}5)$ von den Seitenflächen:*

Abstand M von E_{BGHC} über die HNF:

$d_{E_{BGHC}} = \frac{|4\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}5-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|-8{,}5|}{5} = 1{,}7$

Abstand M von E_{ABGF} (=x_1x_2-Koordinatenebene) über die HNF:

$d_{E_{ABGF}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1}} = 0{,}5$

Abstand M von E_{ACHF} (=x_1x_3-Koordinatenebene) wie $d_{E_{ABGF}} = 0{,}5$

Der Zylinder berührt nur zwei Seitenflächen, er berührt nicht die Seitenfläche $BGHC$.

Gleicher Abstand $M^*(0|r|r)$ von den Seitenflächen:

Abstand M^* von E_{BGHC} über die HNF: $d_{E_{BGHC}} = \frac{|4\cdot r+3\cdot r-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|7r-12|}{5}$

Abstand M^* von E_{ABGF} (=x_1x_2-Koordinatenebene) über die HNF:

$d_{E_{ABGF}} = \frac{|r|}{\sqrt{1}} = |r|$ $\qquad d_{E_{BGHC}} = d_{E_{ABGF}}$

$\frac{|7r-12|}{5} = r \;\Rightarrow\; |7r-12| = 5r$

$7r_1 - 12 = 5r_1 \;\Rightarrow\; r_1 = 6$ $\qquad 7r_2 - 12 = -5r_2 \;\Rightarrow\; r_2 = 1$

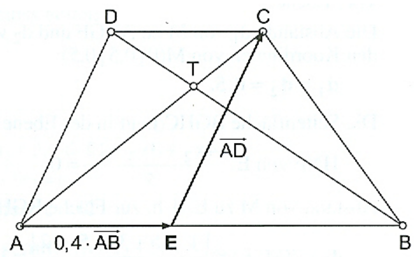
Die Lösung $r_1 = 6$ entfällt, da dann der Mittelpunkt M^* außerhalb des Prismas liegen würde.

Der Radius des Zylinders, der alle drei Seitenflächen berührt beträgt $1\,LE$.

Lösung B2. 2

Klausuraufschrieb

Nachdem wir das Viereck $ABCD$ gezeichnet haben, ziehen wir eine Parallele zu $\overline{AD}$ durch C und erhalten dadurch das Parallelogramm $AECD$ (siehe nebenstehende Abbildung).



Einfachste Lösung:

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{AB}}{0{,}4\cdot\overline{AB}} = \frac{1}{0{,}4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Die Diagonale $\overline{AC}$ wird von der anderen Diagonalen im Verhältnis $5:2$ geteilt.

Die (umständlichere) vektorielle Lösung:

$$\overrightarrow{AC} = 0{,}4\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Wir betrachten nun den geschlossenen Vektorzug $ATBA$.

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA} = \vec{o}$$

Mit den beiden linear unabhängigen Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ ergibt sich:

$$\overrightarrow{AT} = r\cdot\left(0{,}4\vec{a} + \vec{b}\right);\; \overrightarrow{TB} = s\cdot\overrightarrow{DB} = s\cdot\left(-\vec{b} + \vec{a}\right);\; \overrightarrow{BA} = -\vec{a}$$

Einsetzen in die obige Gleichung:

$$r\cdot\left(0{,}4\vec{a} + \vec{b}\right) + s\cdot\left(-\vec{b} + \vec{a}\right) - \vec{a} = \vec{o}$$

$$\vec{a}\cdot(0{,}4r + s - 1) + \vec{b}\cdot(r - s) = \vec{o}$$

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, muss gelten:

(1) $0{,}4r + s - 1 = 0$

(2) $r - s = 0 \;\Rightarrow\; r = s \;\longrightarrow\; (1)$

(1) $0{,}4s + s - 1 = 0 \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{1{,}4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7};\; r = \frac{5}{7}$

Die Strecke $\overline{AC} = \frac{7}{7}$ ist also in $\overline{AT} = \frac{5}{7}$ und $\overline{TC} = \frac{2}{7}$ Teile unterteilt. Das Verhältnis $\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}}$ beträgt $5:2$.