



Aufgabe B1

Die x_1x_2 -Ebene beschreibt eine flache Landschaft, in der ein Flugplatz liegt. Eine Radarstation befindet sich im Punkt $R_1(6|3|0)$.

Das Radar erfasst ein Testflugzeug F_1 um 7.00 Uhr im Punkt $P(7|29|7)$ und ermittelt als Flugbahn des Flugzeugs

$$f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(t in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km).

- a) In welchem Punkt befindet sich das Flugzeug um 7.01 Uhr?
Woran erkennen Sie, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet?
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in km/h .
Unter welchem Winkel fliegt das Flugzeug auf den Boden zu?
Zu welcher Uhrzeit und in welchem Punkt würde es bei Beibehaltung dieser Flugbahn auf dem Boden aufsetzen?
- b) Eine weitere Radarstation befindet sich im Punkt $R_2(17|9|0)$.
Der Anflug des Testflugzeugs F_1 auf den Flugplatz ist optimal, wenn die Flugbahn f_1 und die beiden Radarstationen in einer Ebene liegen.
Prüfen Sie, ob das zutrifft.
Die Radarstation R_2 übernimmt die Flugüberwachung zu dem Zeitpunkt, ab dem sich das Flugzeug von R_1 entfernt.
Um wie viel Uhr ist dies der Fall?

- c) Die Flugbahn eines zweiten Testflugzeugs F_2 wird beschrieben durch

$$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(t in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km).

Wie weit sind die Flugzeuge F_1 und F_2 um 7.04 Uhr voneinander entfernt?
Berechnen Sie, wie nahe sich die beiden Flugzeuge kommen.

Aufgabe B2.1

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide hat die Eckpunkte $P(0|-6|0)$, $Q(12|0|0)$ und $R(0|6|0)$. Die Pyramide wird von einer Ebene geschnitten und der obere Teilkörper wird entfernt. Die Deckfläche des so entstandenen Pyramidenstumpfs hat die Eckpunkte $P^*(0|-2|2)$, $Q^*(2|0|2,5)$ und $R^*(0|1|2,5)$.

- a) Stellen Sie den Pyramidenstumpf in einem Koordinatensystem dar.
Begründen Sie, dass die Deck- und die Grundfläche des Pyramidenstumpfes nicht parallel sind.
Bestimmen Sie den Winkel, den die Kante QQ^* mit der x_1 -Achse bildet.
Zeigen Sie, dass $S(0|0|3)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.
- b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q^* von der Geraden durch Q und R .
Zeigen Sie, dass die Seitenfläche QRR^*Q^* des Pyramidenstumpfs ein Trapez ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

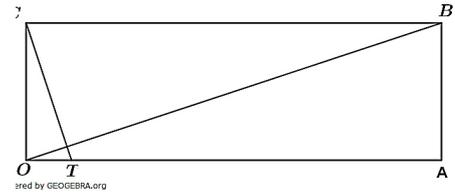
Wahlteilaufgaben zur analytischen Geometrie

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW

Aufgabe B2.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Das Rechteck $OABC$ ist dreimal so lang wie breit. Für den Punkt T gilt $\overline{OT} = \frac{1}{9}\overline{OA}$.

Zeigen Sie, dass die Strecken \overline{OB} und \overline{TC} orthogonal sind.



Lösung B1

Lösungslogik

a) *Position um 7.01 Uhr:*

Der Punkt um 7.01 Uhr entspricht $t = 1$ der Fluggeraden.

Begründung Sinkflug:

Sinkflug, wegen negativem Wert der x_3 -Koordinate des Richtungsvektors.

Geschwindigkeit in km/h:

Die Geschwindigkeit in km/h ist 60-mal der Betrag des Richtungsvektors von f_1 .

Winkel von F_1 zur Landebahn:

Wir berechnen den Schnittwinkel, den der Richtungsvektor von f_1 mit dem Normalenvektor der x_1x_2 -Ebene einschließt.

Zeitpunkt der Landung:

Wir berechnen t der Fluggeraden für die x_3 -Koordinate gleich 0 ist.

b) *Ebene, in der die Radarstation R_1 und R_2 liegen und zusätzlich der Aufpunkt $A(7|29|7)$ des Flugzeuges:*

Wir bilden die Ebenengleichung E mit dem Aufpunkt R_1 , dem ersten Richtungsvektor $\overrightarrow{R_1R_2}$ und dem Richtungsvektor der Fluggeraden als zweiten Richtungsvektor der Ebene. Danach prüfen wir, ob der Aufpunkt $A \in E$ ist.

Zeitpunkt der Überwachung durch Radarstation R_2 :

Wir bilden die Abstandsfunktion des Flugzeuges von der Radarstation R_1 und bestimmen mit dem GTR das Minimum. Dies ist der Zeitpunkt, ab dem sich das Flugzeug von der Radarstation R_1 wieder entfernt.

c) *Entfernung der beiden Flugzeuge um 7.04:*

Wir berechnen den Abstand zwischen den beiden Flugkoordinaten zum Zeitpunkt $t = 4$.

Kleinster Abstand der beiden Flugzeuge:

Wir bilden die Abstandsfunktion der beiden Flugzeuge voneinander und bestimmen mit dem GTR das Minimum.

Klausuraufschrieb

a) *Position um 7.01 Uhr:*

$$\overrightarrow{OP_{t=1}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$$

F_1 befindet sich um 7.01 Uhr in Position $P(10|27|6)$.

Begründung Sinkflug:

F_1 befindet sich im Sinkflug, weil die x_3 -Koordinate des Richtungsvektors von f_1 negativ ist.

Geschwindigkeit in km/h:

$$v_{F_1} = 60 \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = 60 \cdot \sqrt{14} \approx 224,5$$

F_1 fliegt mit 224,5 km/h.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW

Winkel von F_1 zur Landebahn:

Winkel zwischen Gerade und Ebene:

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{rv_{F_1}} \cdot \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{F_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \right) = 15,5^\circ$$

Das Flugzeug fliegt unter einem Winkel von $15,5^\circ$ dem Boden zu.

Zeitpunkt der Landung:

$$x_3 = 0 = 7 - t \Rightarrow t = 7$$

$$\overrightarrow{OP_{Landung}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug landet um 7.07 Uhr im Punkt $P_{Landung}(28|15|0)$.

- b) Ebene, in der die Radarstation R_1 und R_2 liegen und zusätzlich der Aufpunkt $A(7|29|7)$ des Flugzeuges:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AR_1} + t \cdot \overrightarrow{R_1R_2}$$

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AR_1} \times \overrightarrow{R_1R_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 \\ 77 \\ -280 \end{pmatrix} = (-7) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$E: 6x_1 - 11x_2 + 40x_3 = d$$

$$E: 6 \cdot 6 - 11 \cdot 3 + 40 \cdot 0 = d \Rightarrow d = 3 \quad | \quad \text{Punktprobe mit } R_1$$

$$E: 6x_1 - 11x_2 + 40x_3 = 3$$

$$E: 6 \cdot 7 - 11 \cdot 29 + 40 \cdot 7 \stackrel{!}{=} 3 \quad | \quad \text{Punktprobe mit } A$$

$$3 = 3$$

Ja, die Flugbahn f_1 und die Radarstationen R_1 und R_2 liegen in einer Ebene.

Zeitpunkt der Überwachung durch Radarstation R_2 :

$$d_{F_1R_1} = \sqrt{(\overrightarrow{x_{F_1}} - \overrightarrow{OR_1})^2} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^2} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^2}$$

$$d(t) = \sqrt{1 + 6t + 9t^2 + 676 - 104t + 4t^2 + 49 - 14t + t^2}$$

$$d(t) = \sqrt{14t^2 - 112t + 726}$$

GTR

GTR

$$d(t)_{min} \approx 22,4 \text{ für } t = 4$$

Radarstation R_2 übernimmt um 7.04 Uhr die Flugüberwachung von F_1 , welches zu diesem Zeitpunkt 22,4 km von R_1 entfernt ist.

- c) Abstand F_1 von F_2 um 7:04:

Position F_1 um 7:04:

$$\overrightarrow{OF_{1(4)}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$$

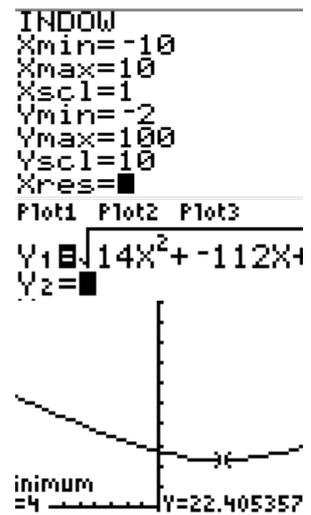
Position F_2 um 7:04:

$$\overrightarrow{OF_{2(4)}} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$d = |\overrightarrow{F_{1(4)}F_{2(4)}}| = \sqrt{(26 - 19)^2 + (19 - 21)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{49 + 4 + 16}$$

$$d = \sqrt{69} \approx 8,31$$

F_1 und F_2 sind um 7:04 ca. 8,3 km voneinander entfernt.



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW
Kleinster Abstand der beiden Flugzeuge:

$$d = \sqrt{(\vec{x}_{F1} - \vec{x}_{F2})^2} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^2}$$

$$d(t) = \sqrt{121 - 22t + t^2 + 324 - 144t + 16t^2 + t^2}$$

$$= \sqrt{18t^2 - 166t + 445}$$

GTR GTR

$$d(t)_{\min} \approx 7,89 \text{ f\u00fcr } t = 4,6$$

Die beiden Flugzeuge n\u00e4hern sich 4,6 min nach Beobachtungsbeginn auf ca. 7,9 km.

L\u00f6sung B2.1

L\u00f6sungslogik

a) *Nachweis Nichtparallelit\u00e4t zwischen E_{PQR} und $E_{P^*Q^*R^*}$:*

Wir bilden die Normalenvektoren der Ebenen durch P, Q und R bzw. P^*, Q^* und R^* . Sind die beiden Normalenvektoren kein Vielfaches voneinander, so sind die Ebenen nicht parallel.

Winkel $\overline{QQ^}$ mit der x_1 -Achse:*

Berechnung \u00fcber die jeweiligen Richtungsvektoren der zugeh\u00f6rigen Geraden.

Urspr\u00fcngliche Spitze S der Pyramide:

Punktbestimmung der Spitze S \u00fcber die Schnittpunktbestimmung der Geraden durch QQ^* und RR^* (wahlweise PP^*).

b) *Abstand des Punktes Q^* von der Geraden durch Q und R :*

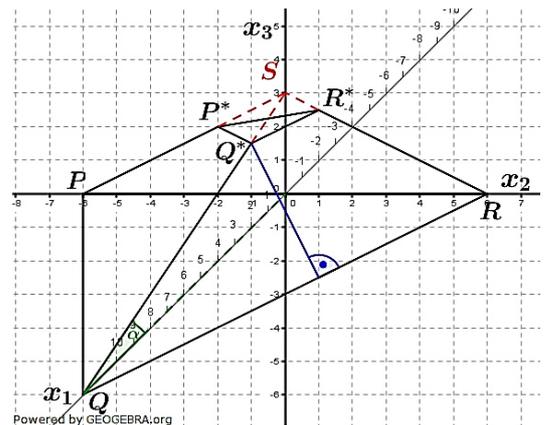
Berechnung \u00fcber die Punkt-Abstandsformel Punkt/Gerade.

Nachweis des Trapezes der Seitenfl\u00e4che:

Nachweis der lineare Abh\u00e4ngigkeit von \overline{QR} und $\overline{Q^*R^*}$ und $|\overline{QR}| \neq |\overline{Q^*R^*}|$.

Fl\u00e4cheninhalt des Trapezes:

Nachweis \u00fcber die Fl\u00e4chenformel eines Trapezes. Die H\u00f6he des Trapezes wurde bereits durch den Abstand von Q^* von der Geraden durch Q und R bestimmt.



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW

Klausuraufschrieb

a) *Nachweis Nichtparallelität zwischen E_{PQR} und $E_{P^*Q^*R^*}$:*

$\overrightarrow{n_{E_{PQR}}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ da die Punkte P, Q und R alle in der x_1x_2 -Ebene liegen.

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{P^*Q^*R^*}}} = \overrightarrow{P^*Q^*} \times \overrightarrow{P^*R^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = (-0,5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{n_{E_{PQR}}} \neq \overrightarrow{n_{E_{P^*Q^*R^*}}}$ sind die beiden Ebenen nicht parallel.

Winkel $\overline{QQ^*}$ mit der x_1 -Achse:

Der Richtungsvektor der x_1 -Achse lautet $\overrightarrow{rv_{x_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{QQ^*} \cdot \overrightarrow{rv_{x_1}}|}{|\overrightarrow{QQ^*}| \cdot |\overrightarrow{rv_{x_1}}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-10|}{\sqrt{106,25}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{106,25}}\right) = 14,03^\circ$$

Der Winkel zwischen $\overline{QQ^*}$ und der x_1 -Achse beträgt etwa 14° .

Ursprüngliche Spitze S der Pyramide:

Gerade durch $\overline{QQ^*}$: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gerade durch $\overline{RR^*}$: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g \cap h$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4r = -12 \Rightarrow r = -3$$

$$-2s^* = 6 \Rightarrow s^* = -3$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die ursprüngliche Spitze hat die Koordinaten $S(0|0|3)$.

q.e.d.

b) *Abstand Q^* von der Geraden durch Q und R :*

$$d = \frac{|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QQ^*}|}{|\overrightarrow{QR}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{180}} = \frac{15 \cdot \sqrt{21}}{6 \cdot \sqrt{5}} \approx 5,12$$

Der Abstand Q^* von der Geraden durch Q und R beträgt 5,1 LE.

Nachweis Trapez QRR^*Q^* :

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{Q^*R^*} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{QR} = 6 \cdot \overrightarrow{Q^*R^*} \Rightarrow \overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{Q^*R^*}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \left| \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{180}; \quad |\overrightarrow{Q^*R^*}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$$

Wegen $\overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{Q^*R^*} \wedge |\overrightarrow{QR}| \neq |\overrightarrow{Q^*R^*}|$ ist das Viereck QRR^*Q^* ein Trapez.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW

Fläche des Trapezes:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{d}{2} \cdot (|\overrightarrow{QR}| + |\overrightarrow{Q^*R^*}|) = \frac{5,1}{2} \cdot (\sqrt{180} + \sqrt{5}) \approx 39,9$$

Die Fläche des Trapezes $QR R^* Q^*$ beträgt ca. 39,9 FE

Lösung B2.2

Klausuraufschrieb

Einfachste Lösungsmöglichkeit

Betrachtung der Situation in einem kartesischen Koordinatensystem. Wir vergeben den Punkten O, A, B, C und T Koordinaten.

$$O(0|0); A(n|0); B\left(n\left|\frac{1}{3}n\right.\right); C\left(0\left|\frac{1}{3}n\right.\right); T\left(\frac{1}{9}n|0\right)$$

Die Funktionsgleichung der Geraden durch O und B lautet dann:

$$y = \frac{1}{3}x$$

\overline{CT} soll senkrecht \overline{OB} stehen, dann muss die Steigung der Geraden durch die Punkte C und T $m = -3$ sein. Mit der Punkt-Steigungsformel bezüglich Punkt T erhalten wir dann

$$y = -3\left(x - \frac{1}{9}n\right)$$

Der Schnittpunkt mit der y -Achse errechnet sich jetzt aus

$$y = -3 \cdot \left(0 - \frac{1}{9}n\right) = \frac{1}{3}n,$$

was den Koordinaten von Punkt C entspricht.

Die Strecken \overline{OB} und \overline{CT} stehen senkrecht aufeinander.

Komplexere Betrachtungsweise über die Vektorzüge \overline{OB} und \overline{CT} .

$$\overline{OB} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \overline{CT} = -\vec{b} + \frac{1}{9} \cdot \vec{a}$$

Nach Aufgabenstellung gilt weiterhin:

$$|\vec{a}| = 3 \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a}^2 = 9\vec{b}^2 \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

\overline{CT} soll senkrecht \overline{OB} stehen, dann muss gelten:

$$\overline{CT} \circ \overline{OB} = 0$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ \left(-\vec{b} + \frac{1}{9} \cdot \vec{a}\right) = 0$$

$$-\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b}^2 + \frac{1}{9} \vec{a}^2 + \frac{1}{9} \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad -\vec{b}^2 + \frac{1}{9} \vec{a}^2 = 0.$$

Mit $\vec{a}^2 = 9\vec{b}^2$:

$$-\vec{b}^2 + \frac{1}{9} \cdot 9 \cdot \vec{b}^2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Die Strecken \overline{OB} und \overline{CT} stehen senkrecht aufeinander.

