Lösung B1

Lösungslogik

a) *Position um* 7.01 *Uhr:*
Der Punkt um 7.01 Uhr entspricht $t = 1$ der Fluggeraden.
Begründung Sinkflug:
Sinkflug, wegen negativem Wert der x_3–Koordinate des Richtungsvektors.
Geschwindigkeit in km/h*:*
Die Geschwindigkeit in km/h ist 60-mal der Betrag des Richtungsvektors von f_1.
Winkel von F_1 *zur Landebahn:*
Wir berechnen den Schnittwinkel, den der Richtungsvektor von f_1 mit dem Normalenvektor der x_1x_2–Ebene einschließt.
Zeitpunkt der Landung:
Wir berechnen t der Fluggeraden für die x_3–Koordinate gleich 0 ist.

b) *Ebene, in der die Radarstation* R_1 *und* R_2 *liegen und zusätzlich der Aufpunkt* $A(7|29|7)$ *des Flugzeuges:*
Wir bilden die Ebenengleichung E mit dem Aufpunkt R_1, dem ersten Richtungsvektor $\overrightarrow{R_1R_2}$ und dem Richtungsvektor der Fluggeraden als zweiten Richtungsvektor der Ebene. Danach prüfen wir, ob der Aufpunkt $A \in E$ ist.
Zeitpunkt der Überwachung durch Radarstation R_2*:*
Wir bilden die Abstandsfunktion des Flugzeuges von der Radarstation R_1 und bestimmen mit dem GTR das Minimum. Dies ist der Zeitpunkt, ab dem sich das Flugzeug von der Radarstation R_1 wieder entfernt.

c) *Entfernung der beiden Flugzeuge um* 7.04*:*
Wir berechnen den Abstand zwischen den beiden Flugkoordinaten zum Zeitpunkt $t = 4$.
Kleinster Abstand der beiden Flugzeuge:
Wir bilden die Abstandsfunktion der beiden Flugzeuge voneinander und bestimmen mit dem GTR das Minimum.

Klausuraufschrieb

a) *Position um* 7.01 *Uhr:*
$$\overrightarrow{OP_{t=1}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$$
F_1 befindet sich um 7.01 Uhr in Position $P(10|27|6)$.
Begründung Sinkflug:
F_1 befindet sich im Sinkflug, weil die x_3–Koordinate des Richtungsvektors von f_1 negativ ist.
Geschwindigkeit in km/h*:*
$$v_{F_1} = 60 \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = 60 \cdot \sqrt{14} \approx 224{,}5$$
F_1 fliegt mit $224{,}5\ km/h$.

Winkel von F_1 zur Landebahn:

Winkel zwischen Gerade und Ebene:

$$sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{rv_{F_1}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{F_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{1}{14} \cdot \sqrt{14}\right) = 15{,}5\,°$$

Das Flugzeug fliegt unter einem Winkel von $15{,}5\,°$ dem Boden zu.

Zeitpunkt der Landung:

$x_3 = 0 = 7 - t \;\; \Rightarrow \;\; t = 7$

$$\overrightarrow{OP_{Landung}} = \begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}28\\15\\0\end{pmatrix}$$

Das Flugzeug landet um 7.07 Uhr im Punkt $P_{Landung}(28|15|0)$.

b) *Ebene, in der die Radarstation R_1 und R_2 liegen und zusätzlich der Aufpunkt $A(7|29|7)$ des Flugzeuges:*

$E\colon\;\; \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AR_1} + t \cdot \overrightarrow{R_1R_2}$

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AR_1} \times \overrightarrow{R_1R_2} = \begin{pmatrix}1\\26\\7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}11\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-42\\77\\-280\end{pmatrix} = (-7) \cdot \begin{pmatrix}6\\-11\\40\end{pmatrix} \;\; \Rightarrow \;\; \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}6\\-11\\40\end{pmatrix}$$

$E\colon\;\; 6x_1 - 11x_2 + 40x_3 = d$

$E\colon\;\; 6 \cdot 6 - 11 \cdot 3 + 40 \cdot 0 = d \;\Rightarrow\; d = 3$ | Punktprobe mit R_1

$E\colon\;\; 6x_1 - 11x_2 + 40x_3 = 3$

$E\colon\;\; 6 \cdot 7 - 11 \cdot 29 + 40 \cdot 7 \stackrel{?}{=} 3$ | Punktprobe mit A

$3 = 3$

Ja, die Flugbahn f_1 und die Radarstationen R_1 und R_2 liegen in einer Ebene.

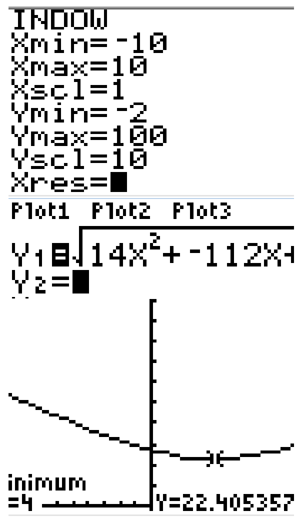
Zeitpunkt der Überwachung durch Radarstation R_2:

$$d_{F_1R_1} = \sqrt{\left(\overrightarrow{x_{F_1}} - \overrightarrow{OR_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}\right)^2} = \sqrt{\left(\begin{pmatrix}1\\26\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)^2}$$

$d(t) = \sqrt{1 + 6t + 9t^2 + 676 - 104t + 4t^2 + 49 - 14t + t^2}$

$d(t) = \sqrt{14t^2 - 112t + 726}$

$d(t)_{min} \stackrel{GTR}{\approx} 22{,}4$ für $t \stackrel{GTR}{=} 4$



Radarstation R_2 übernimmt um 7.04 Uhr die Flugüberwachung von F_1, welches zu diesem Zeitpunkt $22{,}4\,km$ von R_1 entfernt ist.

c) *Abstand F_1 von F_2 um $7{:}04$:*

Position F_1 um $7{:}04$:

$$\overrightarrow{OF_{1(4)}} = \begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\21\\3\end{pmatrix}$$

Position F_2 um $7{:}04$:

$$\overrightarrow{OF_{2(4)}} = \begin{pmatrix}18\\11\\7\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26\\19\\7\end{pmatrix}$$

$d = \left|\overrightarrow{F_{1(4)}F_{2(4)}}\right| = \sqrt{(26-19)^2 + (19-21)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{49 + 4 + 16}$

$d = \sqrt{69} \approx 8{,}31$

F_1 und F_2 sind um $7{:}04$ ca. $8{,}3\,km$ voneinander entfernt.

Kleinester Abstand der beiden Flugzeuge:

$$d=\sqrt{(\overrightarrow{x_{F1}}-\overrightarrow{x_{F2}})^2}=\sqrt{\left(\left(\begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}18\\11\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\begin{pmatrix}-11\\18\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)^2}$$

$$d(t)=\sqrt{121-22t+t^2+324-144t+16t^2+t^2}$$
$$=\sqrt{18t^2-166t+445}$$

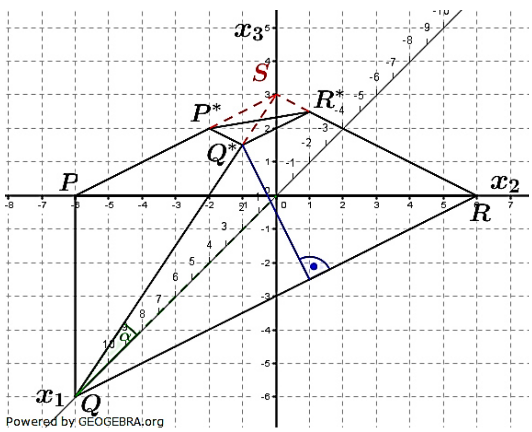
$$d(t)_{min}\overset{\text{GTR}}{\approx}7{,}89 \text{ für } t\overset{\text{GTR}}{=}4{,}6$$

Die beiden Flugzeuge nähern sich $4{,}6\,min$ nach Beobachtungsbeginn auf ca. $7{,}9\,km$.

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Nachweis Nichtparallelität zwischen E_{PQR} und $E_{P^*Q^*R^*}$:*
Wir bilden die Normalenvektoren der Ebenen durch P, Q und R bzw. P^*, Q^* und R^*. Sind die beiden Normalenvektoren kein Vielfaches voneinander, so sind die Ebenen nicht parallel.



Winkel $\overline{QQ^*}$ mit der x_1–Achse:
Berechnung über die jeweiligen Richtungsvektoren der zugehörigen Geraden.
Ursprüngliche Spitze S der Pyramide:
Punktbestimmung der Spitze S über die Schnittpunktbestimmung der Geraden durch QQ^* und RR^* (wahlweise PP^*).

b) *Abstand des Punktes Q^* von der Geraden durch Q und R:*
Berechnung über die Punkt-Abstandsformel Punkt/Gerade.
Nachweis des Trapezes der Seitenfläche:
Nachweis der lineare Abhängigkeit von $\overrightarrow{QR}$ und $\overrightarrow{Q^*R^*}$ und $\left|\overrightarrow{QR}\right|\neq\left|\overrightarrow{Q^*R^*}\right|$.
Flächeninhalt des Trapezes:
Nachweis über die Flächenformel eines Trapezes. Die Höhe des Trapezes wurde bereits durch den Abstand von Q^* von der Geraden durch Q und R bestimmt.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2009 BW

Klausuraufschrieb

a) *Nachweis Nichtparallelität zwischen E_{PQR} und $E_{P^*Q^*R^*}$:*

$\overrightarrow{n_{E_{PQR}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ da die Punkte P, Q und R alle in der x_1x_2–Ebene liegen.

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{P^*Q^*R^*}}} = \overrightarrow{P^*Q^*} \times \overrightarrow{P^*R^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = (-0{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{n_{E_{PQR}}} \neq \overrightarrow{n_{E_{P^*Q^*R^*}}}$ sind die beiden Ebenen nicht parallel.

Winkel $\overline{QQ^*}$ mit der x_1–Achse:

Der Richtungsvektor der x_1–Achse lautet $\overrightarrow{rv_{x_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{QQ^*} \circ \overrightarrow{rv_{x_1}}|}{|\overrightarrow{QQ^*}| \cdot |\overrightarrow{rv_{x_1}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-10|}{\sqrt{106{,}25}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{106{,}25}}\right) = 14{,}03\,°$$

Der Winkel zwischen $\overline{QQ^*}$ und der x_1–Achse beträgt etwa $14\,°$.

Ursprüngliche Spitze S der Pyramide:

Gerade durch $\overline{QQ^*}$: $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gerade durch $\overline{RR^*}$: $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g \cap h$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4r = -12 \Longrightarrow \quad r = -3$

$-2s = 6 \Longrightarrow \quad s = -3$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die ursprüngliche Spitze hat die Koordinaten $S(0|0|3)$. **q.e.d.**

b) *Abstand Q^* von der Geraden durch Q und R:*

$$d = \frac{|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QQ^*}|}{|\overrightarrow{QR}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{180}} = \frac{15 \cdot \sqrt{21}}{6 \cdot \sqrt{5}} \approx 5{,}12$$

Der Abstand Q^* von der Geraden durch Q und R beträgt $5{,}1\ LE$.

Nachweis Trapez QRR^*Q^*:

$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{Q^*R^*} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{QR} = 6 \cdot \overrightarrow{Q^*R^*} \Longrightarrow \overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{Q^*R^*}$

$|\overrightarrow{QR}| = \left|\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{180}; \quad |\overrightarrow{Q^*R^*}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}$

Wegen $\overrightarrow{QR} \parallel \overrightarrow{Q^*R^*} \wedge |\overrightarrow{QR}| \neq |\overrightarrow{Q^*R^*}|$ ist das Viereck QRR^*Q^* ein Trapez.

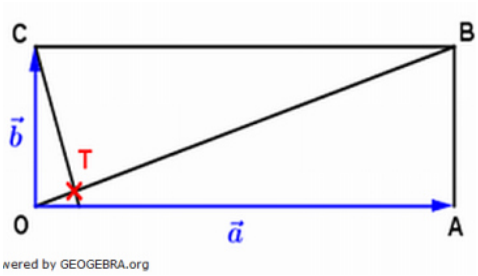
Fläche des Trapezes:
$A_{Trapez} = \frac{d}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{QR}\right| + \left|\overrightarrow{Q^*R^*}\right|\right) = \frac{5{,}1}{2} \cdot \left(\sqrt{180} + \sqrt{5}\right) \approx 39{,}9$
Die Fläche des Trapezes QRR^*Q^* beträgt ca. $39{,}9\ FE$

Lösung B2.2

Klausuraufschrieb

Einfachste Lösungsmöglichkeit

Betrachtung der Situation in einem kartesischen Koordinatensystem. Wir vergeben den Punkten O, A, B, C und T Koordinaten.



$O(0|0)$; $A(n|0)$; $B\left(n\middle|\frac{1}{3}n\right)$; $C\left(0\middle|\frac{1}{3}n\right)$; $T(\frac{1}{9}n|0)$

Die Funktionsgleichung der Geraden durch O und B lautet dann:

$$y = \frac{1}{3}x$$

$\overline{CT}$ soll senkrecht $\overline{OB}$ stehen, dann muss die Steigung der Geraden durch die Punkte C und T $m = -3$ sein. Mit der Punkt-Steigungsformel bezüglich Punkt T erhalten wir dann

$$y = -3(x - \frac{1}{9}n)$$

Der Schnittpunkt mit der y–Achse errechnet sich jetzt aus

$$y = -3 \cdot \left(0 - \frac{1}{9}n\right) = \frac{1}{3} \cdot n,$$

was den Koordinaten von Punkt C entspricht.

Die Strecken $\overline{OB}$ und $\overline{CT}$ stehen senkrecht aufeinander.

Komplexere Betrachtungsweise über die Vektorzüge $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{CT}$.

$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CT} = -\vec{b} + \frac{1}{9} \cdot \vec{a}$

Nach Aufgabenstellung gilt weiterhin:

$$|\vec{a}| = 3 \cdot \left|\vec{b}\right| \implies \vec{a}^2 = 9\vec{b}^2 \qquad \vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

$\overrightarrow{CT}$ soll senkrecht $\overrightarrow{OB}$ stehen, dann muss gelten:

$$\overrightarrow{CT} \circ \overrightarrow{OB} = 0$$
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \circ \left(-\vec{b} + \frac{1}{9} \cdot \vec{a}\right) = 0$$
$$-\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b}^2 + \frac{1}{9}\vec{a}^2 + \frac{1}{9} \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \qquad -\vec{b}^2 + \frac{1}{9}\vec{a}^2 = 0.$$

Mit $\vec{a}^2 = 9\vec{b}^2$:

$$-\vec{b}^2 + \frac{1}{9} \cdot 9 \cdot \vec{b}^2 = 0 \implies 0 = 0$$

Die Strecken $\overline{OB}$ und $\overline{CT}$ stehen senkrecht aufeinander.