Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2010 BW

Aufgabe B1

Gegeben sind die Punkte $A(0|4|0)$, $B(0|0|2)$ und $C(4|0|0)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Ergänzen Sie das Dreieck ABC durch einen Punkt D zu einer Raute.
Berechnen Sie die Innenwinkel der Raute.
Zeigen Sie, dass die Raute in der Ebene E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.
(Teilergebnis: $D(4|4|-2)$).

Gegeben ist für jedes $t \neq 0$ der Punkt $S_t(-3+3t|-3+3t|5+t)$. Die Pyramide P_t hat die Grundfläche $ABCD$ und die Spitze S_t.

b) Zeichnen Sie die Pyramide P_3 in ein Koordinatensystem.
Die Punkte B, D und S_3 legen eine Ebene F fest.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von F.
Zeigen Sie, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide P_3 ist.

c) Für welchen Wert von t geht die Höhe der Pyramide P_t durch den Mittelpunkt der Grundfläche?
Das gleichschenklige Dreieck ACS_3 wird um die Achse AC gedreht. In welchen Punkten durchstößt dabei seine Spitze die x_1x_2-Ebene?

Aufgabe B2.1

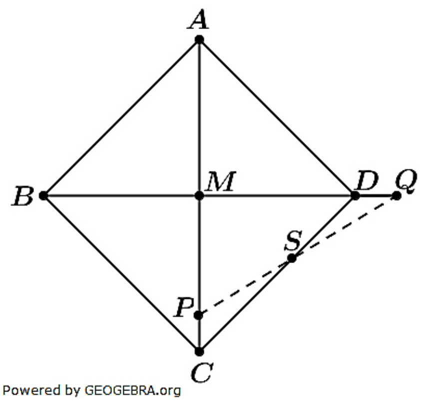
Gegeben sind der Punkt $A(4{,}5|6|3{,}5)$ sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1x_2 –Ebene.
Zeichnen Sie die Gerade g in ein Koordinatensystem.
Unter welchem Winkel schneidet g die x_1x_2 –Ebene?
Welcher Punkt F auf der Geraden g hat vom Punkt A den kleinsten Abstand?
Die Gerade h entsteht durch Spiegelung von g an A.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.
(Teilergebnis: $F(3|4|1)$)

b) Begründen Sie, dass bei Rotation der Geraden g um die Gerade durch A und F eine Ebene entsteht.
Zeigen Sie, dass $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ eine Gleichung dieser Ebene ist.
Untersuchen Sie, ob die Punkte $P(18|-9|1)$ und $Q(-2|1|-9)$ auf verschiedenen Seiten dieser Ebene liegen.

Aufgabe B2.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

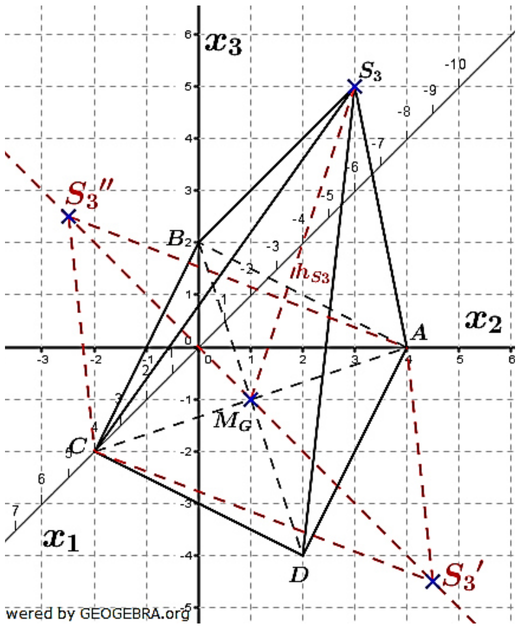
Das Quadrat $ABCD$ hat den Mittelpunkt M. Die Punkte P und Q werden so gewählt, dass $\overline{MP} = \frac{3}{4}\overline{MC}$ und $\overline{MQ} = \frac{5}{4}\overline{MD}$ gilt.
Die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{PQ}$ schneiden sich im Punkt S.
In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecke $\overline{CD}$?



Lösung B1

Lösungslogik

a) *Gleichschenkliges Dreieck ABC:*
Zwei Dreiecksseiten müssen gleich lang sein.
Koordinaten des Punktes D:
Berechnung der Koordinaten von D über Vektoraddition.
Innenwinkel der Raute:
Innenwinkel der Raute über Schnittwinkelbestimmung zweier Vektoren. Eine Raute hat zwei gegenüberliegende gleich große Winkel. Ist z. Bsp. der Winkel α ermittelt, errechnet sich der zweite Winkel über $\beta = 180° - \alpha$
Koordinatengleichung der Ebene, in der die Raute liegt.
Wir bilden das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ und machen eine Punktprobe mit A.



b) *Zeichnung von P_3 in Koordinatensystem:*
Siehe Grafik rechts.
Koordinatengleichung von F:
Wir bilden das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{BS_3}$ und machen eine Punktprobe mit B.
Symmetrieebene F:
Ebene F ist dann Symmetrieebene, wenn ihr Normalenvektor und der Normalenvektor von E aufeinander senkrecht stehen.

c) *t für Höhe der Pyramide P_t durch Mittelpunkt der Grundfläche:*
Der Vektor $\overrightarrow{M_G S_t}$ muss ein Vielfaches des Normalenvektors von E sein.
Punkte der x_1x_2–Ebene bei Drehung von ACS_3 um die Achse AC:
Für S_3' bzw. S_3'' gilt $|\overrightarrow{M_G S_3}| = |\overrightarrow{M_G S_3'}| = |\overrightarrow{M_G S_3''}|$. Da F Symmetrieebene ist, ist auch die Ebene durch A, C und S_3 Symmetrieebene. Der Mittelpunkt M_G liegt in der x_1x_2-Ebene auf einer Geraden durch den Ursprung und M_G.

Klausuraufschrieb

a) *Gleichschenkliges Dreieck ABC:*

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{20}; \quad |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{32}; \quad |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{20}$$

Wegen $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.
Koordinaten des Punktes D:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $D(4|4|-2)$ bildet mit A, B und C zusammen eine Raute.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2010 BW

Innenwinkel der Raute:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-4|}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{5}$$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 70{,}46°$

$\beta = 180° - \alpha = 109{,}54°$

Die Schnittwinkel der Raute sind $\alpha = 70{,}5°$ und $\beta = 109{,}5°$.

Koordinatengleichung der Ebene, in der die Raute liegt.

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ x_1 + x_2 + 2x_3 = d$

$E\colon\ 0 + 4 + 2 \cdot 0 = d \Rightarrow d = 4$ | Punktprobe mit A

$E\colon\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$

b) *Koordinatengleichung von F:*

$S_3(6|6|8)$

$$k \cdot \overrightarrow{n_F} = \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BS_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ -48 \\ 0 \end{pmatrix} = 48 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F\colon\ x_1 - x_2 = d$

$F\colon\ 0 - 0 = d \Rightarrow d = 0$ | Punktprobe mit B

$F\colon\ x_1 - x_2 = 0$

Symmetrieebene F:

$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} \stackrel{?}{=} 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = 0$ ist F die Symmetrieebene der Pyramide P_3.

c) *t für Höhe der Pyramide P_t durch Mittelpunkt der Grundfläche:*

Mittelpunkt M_G:

$$\overrightarrow{OM_G} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M_G(2|2|0)$$

$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{M_G S_t}$

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 3t \\ -5 + 3t \\ 5 + t \end{pmatrix}$$

(1) $k = -5 + 3t$

(2) $2k = 5 + t$

(1)->(2)

(2) $2(-5 + 3t) = 5 + t$

$5t = 15 \Rightarrow t = 3$

Für $t = 3$ verläuft die Pyramidenhöhe durch den Schnittpunkt M_G der Diagonalen der Raute $ABCD$.

Punkte der x_1x_2–Ebene bei Drehung von ACS_3 um die Achse AC:

Es gilt: $|\overrightarrow{M_G S_3}| = |\overrightarrow{M_G S_3'}| = |\overrightarrow{M_G S_3''}|$

$$|\overrightarrow{M_G S_3}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{96}$$

$S_3'(u|u|0)$

$\left|\overrightarrow{M_G S_3{}'}\right| = \left|\begin{pmatrix} u-2 \\ u-2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2\cdot(u-2)^2} = \sqrt{96} \quad | \quad {}^2;\ :2$

$(u-2)^2 = 48$

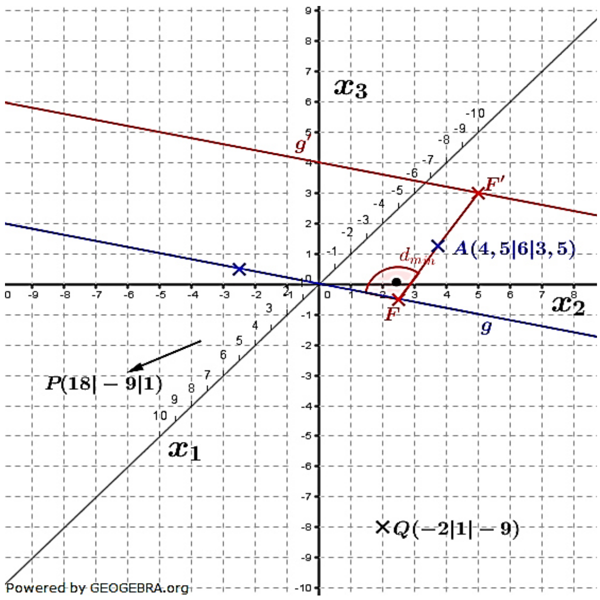
$|u-2| = \sqrt{48} \approx 6{,}93 \implies u_1 = 8{,}93;\ u_2 = -4{,}93$

Die Spitze des um die Achse AC gedrehten Dreiecks ACS_3 durchstößt die x_1x_2–Ebene in den Punkten $S_3{}'(8{,}93|8{,}93|0)$ und $S_3{}''(-4{,}93|-4{,}93|0)$.

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Schnittpunkt von g mit der x_1x_2-Ebene:*
Schnittpunkt ist der Spurpunkt der Geraden g mit der x_1x_2-Ebene.
Schnittwinkel von g mit der x_1x_2-Ebene:
Schnittwinkelberechnung mit dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der x_1x_2-Ebene.
Kleinster Abstand von g zu Punkt A:
Der Vektor $\overrightarrow{FA}$ und der Richtungsvektor der Geraden müssen senkrecht stehen.



Spiegelgerade h:
Der Spiegelpunkt F' wird zum Aufpunkt von h, der Richtungsvektor wird beibehalten.

b) *Begründung:*
Die Gerade durch A und F steht senkrecht auf g. Somit ist der Richtungsvektor $\overrightarrow{AF}$ der Normalenvektor der Rotationsebene mit deren Aufpunkt F.
Nachweis der Koordinatengleichung der Rotationsebene:
Mit dem zuvor ermittelten Normalenvektor ergibt sich auch die Koordinatengleichung der Ebene.
Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Ebene:
Betragslose Abstandsbestimmung von P und Q zu E über die HNF.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2010 BW

Klausuraufschrieb

a) *Schnittpunkt von g mit der x_1x_2-Ebene:*

Der Spurpunkt von g mit der x_1x_2–Ebene hat die x_3–Koordinate 0.

$x_3 = 0 = 3 + t \implies t = -3$

$$\overrightarrow{OS_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}$$

$S_{x_1x_2}(2|6|0)$

Schnittwinkel von g mit der x_1x_2-Ebene:

$$\overrightarrow{n_{E_{x_1x_2}}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_{E_{x_1x_2}}} \circ \overrightarrow{rv_g}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{E_{x_1x_2}}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{rv_g}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{6}}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 24{,}1\,°$$

Die Gerade g schneidet die x_1x_2-Ebene unter etwa $24{,}1\,°$.

Kleinster Abstand A von g:

$$\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{AF} = 0$$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}5 + t - 4{,}5\\-2t - 6\\3 + t - 3{,}5\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0{,}5 + t\\-6 - 2t\\-0{,}5 + t\end{pmatrix} = 0$$

$$0{,}5 + t + 12 + 4t - 0{,}5 + t = 0 \implies t = -2$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$$

Der Punkt $F(3|4|1)$ auf g hat von A den kleinsten Abstand.

Spiegelgerade h:

Spiegelpunkt F':

$$\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} + 2 \cdot \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1{,}5\\2\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\\6\end{pmatrix} \implies F'(6|8|6)$$

$$h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OF'} + r \cdot \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}6\\8\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$$

b) *Begründung:*

$\overrightarrow{FA} \perp \overrightarrow{rv_g}$, somit steht die Drehachse senkrecht auf dem Rotationsgebilde. Dadurch entsteht eine Ebene E_G.

Wegen $\overrightarrow{FA} \perp \overrightarrow{rv_g}$ ist $\overrightarrow{n_{E_G}} = k \cdot \overrightarrow{FA} \implies \overrightarrow{n_{E_G}} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

Nachweis der Koordinatengleichung:

$$\overrightarrow{n_{E_G}} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$E: \; 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$

$E: \; 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = d \implies d = 30$ | Punktprobe mit F

$E: \; 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ **q.e.d.**

Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Ebene:

Für P:

$d_P = \frac{3\cdot 18-4\cdot 9+5\cdot 1-30}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{-7}{\sqrt{50}}$

Für Q:

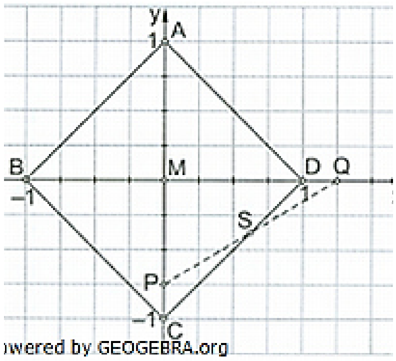
$d_Q = \frac{3\cdot(-2)+4\cdot 1+5\cdot(-9)-30}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{-77}{\sqrt{50}}$

Da beide Abstände das gleiche Vorzeichen haben, liegen P und Q auf derselben Seite der Ebene E.

Lösung B2.2

Klausuraufschrieb

Einfachste Lösung:



Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Punkt M im Ursprung. Die Gerade durch C und D hat die Gleichung $g(x) = x - 1$. Die Gerade durch P und Q hat die Gleichung $h(x) = \frac{3}{5}x - \frac{3}{4}$.

Punkt S über $g(x) \cap h(x)$:

$x - \frac{3}{5}x - 1 + \frac{3}{4} = 0$

$\frac{2}{5}x - \frac{1}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5}{8}$

$g\left(\frac{5}{8}\right) = -\frac{3}{8}$

Koordinaten von S sind $S(\frac{5}{8}| -\frac{3}{8})$

Berechnung der Strecke $\overline{SD}$:

$\overline{SD} = \sqrt{\left(1-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{3}{8}\cdot\sqrt{2}$

Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:

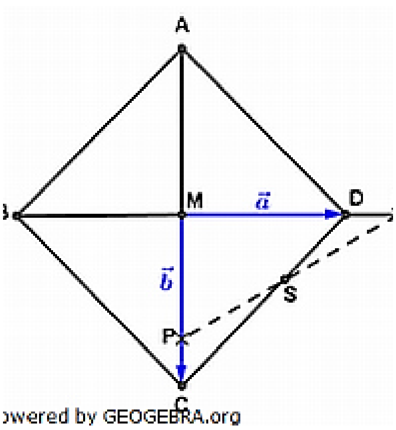
$\overline{CD} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Damit ist die Strecke $\overline{CS} = \frac{5}{8}\cdot\sqrt{2}$

$\frac{\overline{CS}}{\overline{SD}} = \frac{\frac{5}{8}\cdot\sqrt{2}}{\frac{3}{8}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5}{3}$

Der Punkt S teilt die Strecke $\overline{CD}$ im Verhältnis $5:3$.

Vektorielle Lösung:



$ABCD$ ist ein Quadrat mit Mittelpunkt in M. Die beiden Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{MC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{MD}$ sind linear unabhängig. Für die Punkte P und Q gilt nach Vorgabe:

$\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{MC} = \frac{3}{4}\cdot\vec{a}$

$\overrightarrow{MQ} = \frac{5}{4}\cdot\overrightarrow{MD} = \frac{5}{4}\cdot\vec{b}$

Wir betrachten den geschlossenen Vektorzug, der über den Schnittpunkt S der Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{PQ}$ führt, z. B. $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SP} = \vec{o}$.

Dabei gilt:

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP} = \vec{a} - \frac{3}{4} \cdot \vec{a} = \frac{1}{4} \cdot \vec{a}$$
$$\overrightarrow{CS} = r \cdot \overrightarrow{CD} = r \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right)$$
$$\overrightarrow{SP} = s \cdot \overrightarrow{QP} = s \cdot \left(-\frac{5}{4} \cdot \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}\right)$$

Eingesetzt in die obige Gleichung liefert:

$$\frac{1}{4} \cdot \vec{a} + r \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right) + s \cdot \left(-\frac{5}{4} \cdot \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}\right) = \vec{o}$$
$$\left(\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4} \cdot s\right) \cdot \vec{a} + \left(r - \frac{5}{4} \cdot s\right) \cdot \vec{b} = \vec{o}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ muss gelten:

I) $\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4} \cdot s = 0$

II) $r - \frac{5}{4} \cdot s = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{4}{5} \cdot r$ eingesetzt in I)

$$\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot r = 0$$
$$\frac{8}{20} \cdot r = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5}{8}$$

Dem Ergebnis entnimmt man:

Die Strecke $\overline{CD} = \frac{8}{8}$ ist also in $\overline{CS} = \frac{5}{8}$ und $\overline{SD} = \frac{3}{8}$ Teile unterteilt.

Das Verhältnis $\frac{\overline{CS}}{\overline{SD}}$ *beträgt* $5:3$.