Aufgabe B1

Eine prismenförmige Truhe ist durch ihre Eckpunkte $A(6|4|0)$, $B(6|8|0)$, $C(-4|8|0)$, $D(-4|4|0)$, $P(6|4|4)$, $Q(6|8|6)$, $R(-4|8|6)$ und $S(-4|4|4)$ gegeben.
Das Viereck $PQRS$ beschreibt den Deckel der Truhe.

a) Stellen Sie die Truhe in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie das Volumen der Truhe.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Deckel der Truhe liegt.
(Teilergebnis: E_{Deckel}: $x_2 - 2x_3 = -4$)

Gegeben ist eine Ebenenschar durch E_a: $x_2 - ax_3 = 8 - 6a$; $a \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass die Ebene, in der der Deckel liegt, und die Ebene, in der die Rückwand $BCRQ$ liegt, zur Ebenenschar gehören.
Zeigen Sie, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen E_a der Schar liegt.
Berechnen Sie den Schnittwinkel φ von E_0 und E_2.
Welche andere Ebene E_a schließt mit der Ebene E_2 ebenfalls den Winkel φ ein?

c) Der Deckel der Truhe ist um die Kante QR drehbar.
Durch Drehung des Deckels um $90°$ wird die Truhe geöffnet. In welcher Ebene E_a liegt der Deckel dann?
Der Punkt P geht bei dieser Drehung in den Punkt P^* über.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P^*.

Aufgabe B2

Ein Gebäude hat als Grundfläche das Rechteck $ABCD$ mit $A(4|0|0)$, $B(4|6|0)$, $C(0|6|0)$ und als Dachfläche das Viereck $EFGH$ mit $E(4|0|4)$, $F(4|6|1)$, $G(0|6|5)$ und $H(0|0|8)$ (Koordinatenangaben in Meter).

a) Stellen Sie das Gebäude in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche $EFGH$ liegt.
Welchen Neigungswinkel besitzt die Dachfläche?
Zeigen Sie, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche.
(Zwischenergebnis: E_{Dach}: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$)

b) Im Innern des Gebäudes soll eine Lampe im Punkt $L(d|d|d)$ angebracht werden. Die Lampe soll von der Bodenfläche und der Dachfläche des Gebäudes den gleichen Abstand haben.
Bestimmen Sie d.

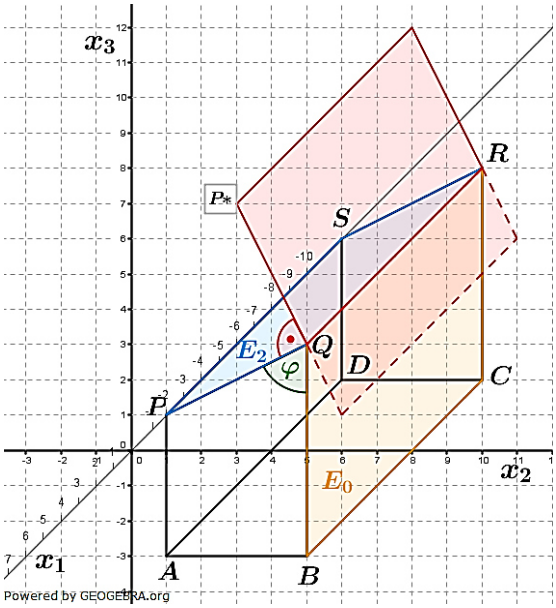
c) Eine Person mit $1{,}7\,m$ Augenhöhe bewegt sich vom Punkt $P(5|1|0)$ aus in positiver x_2 –Richtung.
Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung B1

Lösungslogik

a) *Truhe in Koordinatensystem:*
Siehe nebenstehende Grafik.
Volumen der Truhe:
Die Truhe ist ein Prisma mit der Grundfläche $ABQP$ und der Höhe $\overline{BC}$.
Koordinatengleichung der Ebene:
Wir bilden das Kreuzprodukt aus $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}$ und machen eine Punktprobe mit P.



b) *Nachweis der Ebenenschar:*
Der Nachweis erfolgt über einen Koeffizientenvergleich.
Nachweis der Schnittgeraden:
Wir bilden $E_1 \cap E_a$.
Schnittwinkel φ:
Berechnung über die Schnittwinkelgleichung zweier Vektoren $\overrightarrow{n_{E_0}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$.
Zweite Ebene mit gleichem φ:
Für die andere Ebene gilt Schnittwinkel von $\overrightarrow{n_{E_a}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ ist gleich Schnittwinkel von $\overrightarrow{n_{E_0}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$.

c) *Bestimmung der Koordinaten von P^*:*
Die Strecke $\overline{QP}$ ist gleich der Strecke $\overline{QP^*}$. Die Ebene durch P^*, Q und S steht senkrecht auf der Ebene $PQRS$. P^* liegt auf der Geraden durch Q mit dem Normalenvektor von E_{PQRS} als Richtungsvektor.

Klausuraufschrieb

a) *Volumen der Truhe:*

$V_{Truhe} = A_{ABPQ} \cdot \overline{BC}$

$A_{ABPQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{AP}\right| + \left|\overrightarrow{BQ}\right|\right) \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \qquad \overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right|$

$\left|\overrightarrow{AP}\right| = 4; \quad \left|\overrightarrow{BQ}\right| = 6; \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 4; \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = 10$

$V_{Truhe} = \frac{1}{2} \cdot (4 + 6) \cdot 4 \cdot 10 = 200$

Die Truhe hat ein Volumen von $200\,VE$.

Koordinatengleichung Ebene E_{Deckel}:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{Deckel}}} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} = (-20) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_{Deckel}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$E_{Deckel}: \; x_2 - 2x_3 = d$

$E_{Deckel}: \; 4 - 2 \cdot 4 = d \implies d = -4 \qquad |$ Punktprobe mit P

$E_{Deckel}: \; x_2 - 2x_3 = -4$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

b) *Nachweis der Ebenenschar:*

E_a: $x_2 - ax_3 = 8 - 6a$

E_{Deckel}: $x_2 - 2x_3 = -4$

$8 - 6a = -4 \Longrightarrow \ a = 2$

E_2: $x_2 - 2x_3 = -4 = E_{Deckel}$

$E_{Rückwand}$:

Die Ebene ist parallel zur x_1x_3–Koordinatenebene im Abstand $x_2 = 8$.

$E_{Rückwand}$: $x_2 = 8$

$8 - 6a = 8 \ \Longrightarrow \ a = 0$

E_0: $x_2 = 8 = E_{Rückwand}$

Die Ebene des Deckels und die Ebene der Rückwand gehören zur Ebenenschar E_a.

Nachweis der Schnittgerade:

Die Schnittgerade von E_0 und E_2 ist die Gerade durch Q und R (siehe Skizze) mit der Gleichung g_{QR}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ t \in \mathbb{R}$

$g_{QR} \cap E_a$

$x_1 = 6 + t; \ x_2 = 8; \ x_3 = 6$

E_a: $8 - 6a = 8 - 6a$: | wahre Aussage

Die Gerade g_{QR} ist Schnittgerade aller E_a.

Schnittwinkel E_0 mit E_2:

$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_{E_2}} \circ \overrightarrow{n_{E_0}}|}{|\overrightarrow{n_{E_2}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_0}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) = 63{,}43\,°$

Die Ebenen E_0 und E_2 schneiden sich unter etwa $63{,}4\,°$.

Zweite Ebene mit gleichem φ:

$$cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_{E_a}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}}|}{|\overrightarrow{n_{E_a}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_2}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$\sqrt{1 + a^2} = |1 + 2a|$ | ^{2}

$1 + a^2 = 4a^2 + 4a + 1$

$3a^2 + 4a = 0$

$a(3a + 4) = 0 \Longrightarrow \ a_1 = 0; \ \ a_2 = -\frac{4}{3}$

Die Ebene $E_{-\frac{4}{3}}$ schließt mit E_2 denselben Winkel ein wie mit E_0.

c) *Bestimmung der Koordinaten von P^*:*

Ebene des Deckels bei Öffnung der Truhe um $90\,°$.

$\overrightarrow{n_a} \circ \overrightarrow{n_{E_2}} = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 + 2a = 0 \ \Longrightarrow \ a = -\frac{1}{2}$

Der um $90\,°$ gedrehte Deckel liegt in der Ebene $E_{-\frac{1}{2}}$.

Koordinaten des Punktes P^*:

$$g_{QP^*}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

$$|\overrightarrow{QP}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{QP^*}| = |\overrightarrow{OP^*} - \overrightarrow{OQ}| = \sqrt{20}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 6-6 \\ 8+t-8 \\ 6-2t-6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{20} \qquad | \qquad ^2$$

$$5t^2 = 20$$

$$t_{1,2} = \pm 2$$

Für $t_1 = 2$ liegt der zugehörige Punkt unterhalb von Q, kommt als Lösungspunkt nicht in Frage.

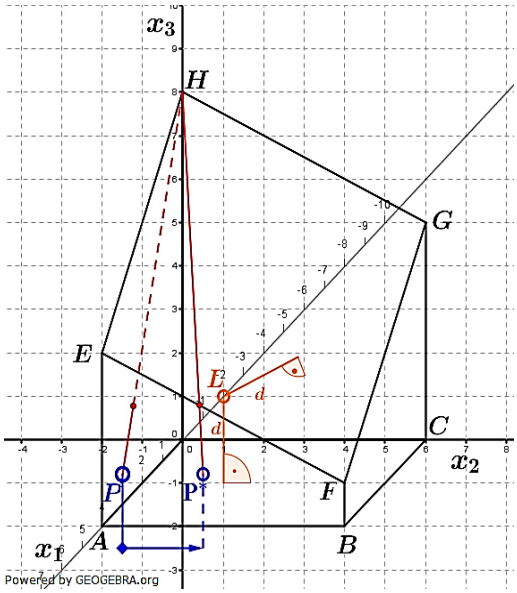
$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P^* hat die Koordinaten $P^*(6|6|10)$.

Lösung B2

Lösungslogik

a) *Gebäude in Koordinatensystem:*
Siehe nebenstehende Grafik.
Koordinatengleichung Ebene E_{Dach}:
Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren $\overrightarrow{HE}$ und $\overrightarrow{HG}$ und machen dann die Punktprobe mit H.
Neigungswinkel der Dachfläche:
Berechnung über die Schnittwinkelgleichung mit $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}}$.
Dachfläche als Parallelogramm:
Nachweis über zwei gegenüberliegende, parallelen Seiten gleicher Länge.
Inhalt der Dachfläche:
Fläche des Parallelogramms über den Betrag des ungekürzten Kreuzproduktes der beiden Seitenvektoren $\overrightarrow{HE}$ und $\overrightarrow{HG}$.



b) *Bestimmung der Koordinaten von L:*
Die HNF von E mit der HNF der x_1x_2–Ebene gleichgesetzt führt zu den Koordinaten des Punktes L.

c) *Weg der Person, damit sie die Ecke H sieht:*
Die Sichtgerade der Person muss die Gerade durch die Punkte E und F schneiden. Die Wegstrecke ergibt sich dann aus der Differenz der x_2-Koordinaten von P und P^*.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung Ebene E_{Dach}:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{Dach}}} = \overrightarrow{HE} \times \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_{Dach}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E_{Dach}: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$

E_{Dach}: $2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 8 = d; \Rightarrow \; d = 16$ | Punktprobe mit H

E_{Dach}: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$

Nachweis Parallelogramm der Dachfläche.

$$\overrightarrow{HE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{HE}| = \sqrt{32}$$

$$\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{GF}| = \sqrt{32}$$

Wegen $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF} \wedge |\overrightarrow{HE}| = |\overrightarrow{GF}|$ ist das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm.

Inhalt der Dachfläche:

$$A_{EFGH} = \left|\overrightarrow{HE} \times \overrightarrow{HG}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \left|12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 12 \cdot \sqrt{9} = 36$$

Die Dachfläche beträgt $36\,m^2$.

b) *Bestimmung der Koordinaten von L:*

Abstand zur Dachfläche:

$h = \frac{|2d+d+2d-16|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5d-16|}{3}$

Abstand zur x_1x_2-Ebene:

$h = d$

Die beiden Abstände sollen gleich sein:

$d = \frac{|5d-16|}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{|5d-16|}{d} = 3$

$d_1 = 8; \quad d_2 = 2$

$d_1 = 8$ ist keine Lösung, da der Punkt $L(8|8|8)$ außerhalb des Gebäudes liegt.

Der Abstand der Lampe zum Boden und zum Dach beträgt $2\,m$. Die Koordinaten sind $L(2|2|2)$.

c) *Weg der Person, damit sie die Ecke H sieht:*

Die Sichtgerade muss die Dachkante $\overline{EF}$ schneiden, ab diesem Standpunkt der Person kann er die Ecke H sehen.

$$g_{EF}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$$

Sichtgerade:

$$g_{HP^*}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1-a \\ -6{,}3 \end{pmatrix}; \; s \in \mathbb{R}$$

$g_{EF} \cap g_{EP^*}$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1-a \\ -6{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

(1) $-5s = -4 \implies s = \frac{4}{5}$

(3) $-3r + 6{,}3s = 4$

$-3r + 6{,}3 \cdot \frac{4}{5} = 4 \implies r = \frac{26}{75}$

(2) $6r - s \cdot (1 - a) = 0$

(2) $6 \cdot \frac{26}{75} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}a \implies a = 1{,}6$

Die Person muss $1{,}6\,m$ *laufen, um die Ecke* H *zu sehen.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de