

Lösung B1

Lösungslogik

- a) *Truhe in Koordinatensystem:*

Siehe nebenstehende Grafik.

Volumen der Truhe:

Die Truhe ist ein Prisma mit der Grundfläche $ABQP$ und der Höhe $\overline{BC}$.

Koordinatengleichung der Ebene:

Wir bilden das Kreuzprodukt aus $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}$ und machen eine Punktprobe mit P .

- b) *Nachweis der Ebenenschar:*

Der Nachweis erfolgt über einen Koeffizientenvergleich.

Nachweis der Schnittgeraden:

Wir bilden $E_1 \cap E_a$.

Schnittwinkel φ :

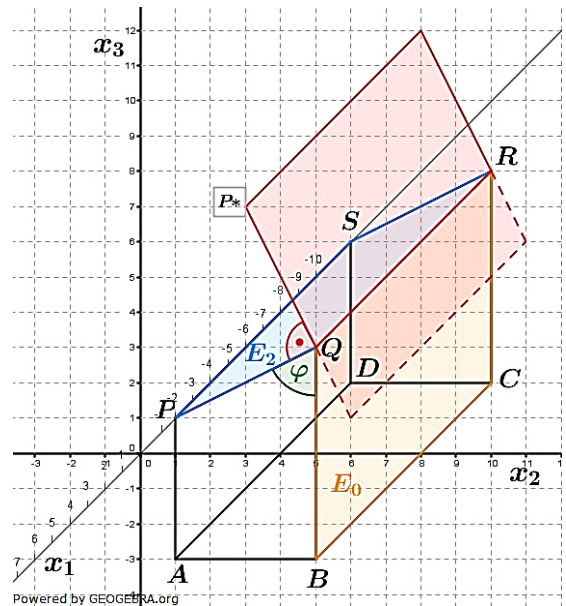
Berechnung über die Schnittwinkelgleichung zweier Vektoren $\overrightarrow{n_{E_0}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$.

Zweite Ebene mit gleichem φ :

Für die andere Ebene gilt Schnittwinkel von $\overrightarrow{n_{E_a}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ ist gleich Schnittwinkel von $\overrightarrow{n_{E_0}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$.

- c) *Bestimmung der Koordinaten von P^* :*

Die Strecke $\overline{QP}$ ist gleich der Strecke $\overline{QP^*}$. Die Ebene durch P^* , Q und S steht senkrecht auf der Ebene $PQRS$. P^* liegt auf der Geraden durch Q mit dem Normalenvektor von E_{PQRS} als Richtungsvektor.



Klausuraufschrieb

- a) *Volumen der Truhe:*

$$V_{\text{Truhe}} = A_{ABPQ} \cdot \overline{BC}$$

$$A_{ABPQ} = \frac{1}{2} \cdot (|\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BQ}|) \cdot |\overrightarrow{AB}| \quad \overline{BC} = |\overrightarrow{BC}|$$

$$|\overrightarrow{AP}| = 4; \quad |\overrightarrow{BQ}| = 6; \quad |\overrightarrow{AB}| = 4; \quad |\overrightarrow{BC}| = 10$$

$$V_{\text{Truhe}} = \frac{1}{2} \cdot (4 + 6) \cdot 4 \cdot 10 = 200$$

Die Truhe hat ein Volumen von 200 VE.

Koordinatengleichung Ebene E_{Deckel} :

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{\text{Deckel}}}} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} = (-20) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_{\text{Deckel}}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_{\text{Deckel}}: x_2 - 2x_3 = d$$

$$E_{\text{Deckel}}: 4 - 2 \cdot 4 = d \Rightarrow d = -4 \quad | \quad \text{Punktprobe mit } P$$

$$E_{\text{Deckel}}: x_2 - 2x_3 = -4$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

b) Nachweis der Ebenenschar:

$$E_a: x_2 - ax_3 = 8 - 6a$$

$$E_{\text{Deckel}}: x_2 - 2x_3 = -4$$

$$8 - 6a = -4 \Rightarrow a = 2$$

$$E_2: x_2 - 2x_3 = -4 = E_{\text{Deckel}}$$

$$E_{\text{Rückwand}}:$$

Die Ebene ist parallel zur x_1x_3 -Koordinatenebene im Abstand $x_2 = 8$.

$$E_{\text{Rückwand}}: x_2 = 8$$

$$8 - 6a = 8 \Rightarrow a = 0$$

$$E_0: x_2 = 8 = E_{\text{Rückwand}}$$

Die Ebene des Deckels und die Ebene der Rückwand gehören zur Ebenenschar E_a .

Nachweis der Schnittgerade:

Die Schnittgerade von E_0 und E_2 ist die Gerade durch Q und R (siehe Skizze)

mit der Gleichung $g_{QR}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

$$g_{QR} \cap E_a$$

$$x_1 = 6 + t; x_2 = 8; x_3 = 6$$

$$E_a: 8 - 6a = 8 - 6a: \quad | \quad \text{wahre Aussage}$$

Die Gerade g_{QR} ist Schnittgerade aller E_a .

Schnittwinkel E_0 mit E_2 :

$$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_{E_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{E_2} \circ \vec{n}_{E_0}|}{|\vec{n}_{E_2}| \cdot |\vec{n}_{E_0}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 63,43^\circ$$

Die Ebenen E_0 und E_2 schneiden sich unter etwa $63,4^\circ$.

Zweite Ebene mit gleichem φ :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{E_a} \circ \vec{n}_{E_2}|}{|\vec{n}_{E_a}| \cdot |\vec{n}_{E_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{1+a^2} = |1+2a| \quad | \quad ^2$$

$$1 + a^2 = 4a^2 + 4a + 1$$

$$3a^2 + 4a = 0$$

$$a(3a + 4) = 0 \Rightarrow a_1 = 0; a_2 = -\frac{4}{3}$$

Die Ebene $E_{-\frac{4}{3}}$ schließt mit E_2 denselben Winkel ein wie mit E_0 .

c) Bestimmung der Koordinaten von P^* :

Ebene des Deckels bei Öffnung der Truhe um 90° .

$$\vec{n}_a \circ \vec{n}_{E_2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Der um 90° gedrehte Deckel liegt in der Ebene $E_{-\frac{1}{2}}$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

Koordinaten des Punktes P^* :

$$g_{QP^*}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$|\overrightarrow{QP}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{QP^*}| = |\overrightarrow{OP^*} - \overrightarrow{OQ}| = \sqrt{20}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 6-6 \\ 8+t-8 \\ 6-2t-6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{20}$$

$$5t^2 = 20$$

$$t_{1,2} = \pm 2$$

Für $t_1 = 2$ liegt der zugehörige Punkt unterhalb von Q , kommt als Lösungspunkt nicht in Frage.

$$\overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P^* hat die Koordinaten $P^*(6|6|10)$.

Lösung B2

Lösungslogik

- a) Gebäude in Koordinatensystem:

Siehe nebenstehende Grafik.

Koordinatengleichung Ebene E_{Dach} :

Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren $\overrightarrow{HE}$ und $\overrightarrow{HG}$ und machen dann die Punktprobe mit H .

Neigungswinkel der Dachfläche:

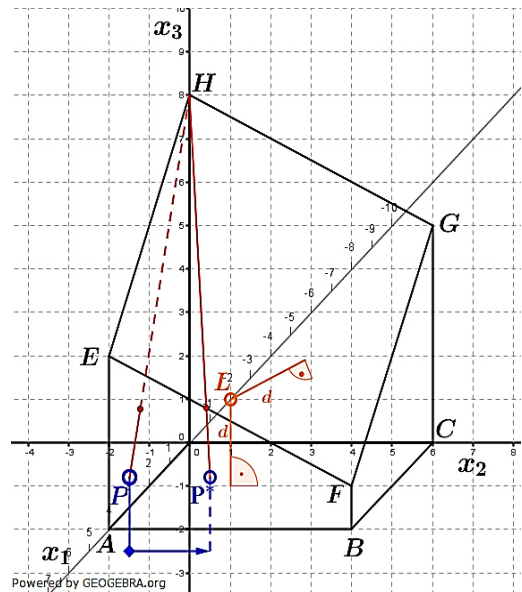
Berechnung über die Schnittwinkelgleichung mit $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_{x_1x_2}$.

Dachfläche als Parallelogramm:

Nachweis über zwei gegenüberliegende, parallelen Seiten gleicher Länge.

Inhalt der Dachfläche:

Fläche des Parallelogramms über den Betrag des ungekürzten Kreuzproduktes der beiden Seitenvektoren $\overrightarrow{HE}$ und $\overrightarrow{HG}$.



- b) *Bestimmung der Koordinaten von L:*

Die HNF von E mit der HNF der x_1x_2 -Ebene gleichgesetzt führt zu den Koordinaten des Punktes L .

- c) *Weg der Person, damit sie die Ecke H sieht:*

Die Sichtgerade der Person muss die Gerade durch die Punkte E und F schneiden. Die Wegstrecke ergibt sich dann aus der Differenz der x_2 -Koordinaten von P und P^* .

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

Klausuraufschrieb

a) Koordinatengleichung Ebene E_{Dach} :

$$k \cdot \vec{n}_{E_{Dach}} = \vec{HE} \times \vec{HG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{E_{Dach}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{Dach}: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$$

$$E_{Dach}: 2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 8 = d; \Rightarrow d = 16 \quad | \quad \text{Punktprobe mit } H$$

$$E_{Dach}: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$$

Nachweis Parallelogramm der Dachfläche.

$$\vec{HE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad |\vec{HE}| = \sqrt{32}$$

$$\vec{GF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad |\vec{GF}| = \sqrt{32}$$

Wegen $\vec{HE} = \vec{GF} \wedge |\vec{HE}| = |\vec{GF}|$ ist das Viereck EFGH ein Parallelogramm.

Inhalt der Dachfläche:

$$A_{EFGH} = |\vec{HE} \times \vec{HG}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \left| 12 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 12 \cdot \sqrt{9} = 36$$

Die Dachfläche beträgt 36 m^2 .

b) Bestimmung der Koordinaten von L:

Abstand zur Dachfläche:

$$h = \frac{|2d+d+2d-16|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5d-16|}{3}$$

Abstand zur x_1x_2 -Ebene:

$$h = d$$

Die beiden Abstände sollen gleich sein:

$$d = \frac{|5d-16|}{3} \Rightarrow \frac{|5d-16|}{d} = 3$$

$$d_1 = 8; \quad d_2 = 2$$

$d_1 = 8$ ist keine Lösung, da der Punkt $L(8|8|8)$ außerhalb des Gebäudes liegt.

Der Abstand der Lampe zum Boden und zum Dach beträgt 2 m. Die Koordinaten sind $L(2|2|2)$.

c) Weg der Person, damit sie die Ecke H sieht:

Die Sichtgerade muss die Dachkante $\overline{EF}$ schneiden, ab diesem Standpunkt der Person kann er die Ecke H sehen.

$$g_{EF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$$

Sichtgerade:

$$g_{HP^*}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1-a \\ -6,3 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

$$g_{EF} \cap g_{EP^*}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1-a \\ -6,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2011 BW

$$(1) \quad -5s = -4 \Rightarrow s = \frac{4}{5}$$

$$(3) \quad -3r + 6,3s = 4$$

$$-3r + 6,3 \cdot \frac{4}{5} = 4 \Rightarrow r = \frac{26}{75}$$

$$(2) \quad 6r - s \cdot (1 - a) = 0$$

$$(2) \quad 6 \cdot \frac{26}{75} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}a \Rightarrow a = 1,6$$

Die Person muss 1,6 m laufen, um die Ecke H zu sehen.