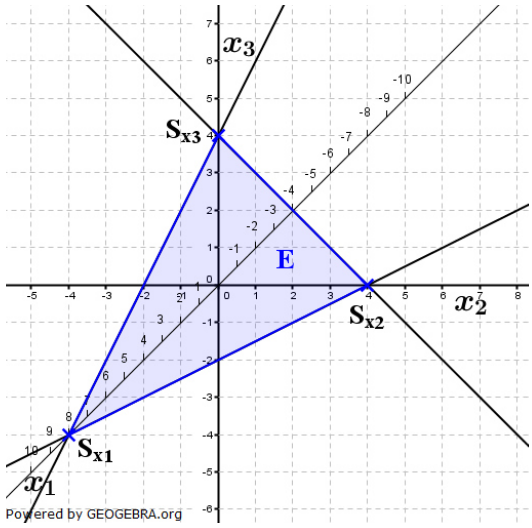
Aufgabe 1

Lösungslogik

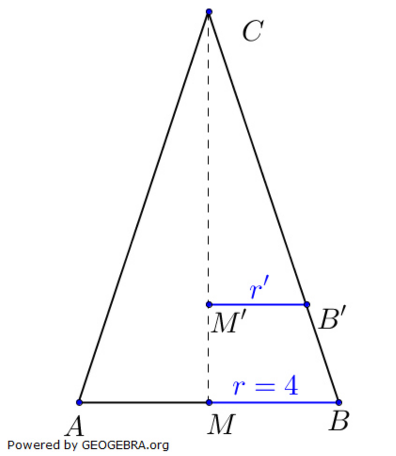
a) Wir erstellen die Koordinatengleichung durch Bildung des Normalenvektors über das Kreuzprodukt. Zum Einzeichnen der Ebene in das Koordinatensystem stellen wir die Achsenabschnittsform her zum Ablesen der Spurpunkte. Schnittwinkelberechnung über Formel für Schnittwinkel Gerade/Ebene.

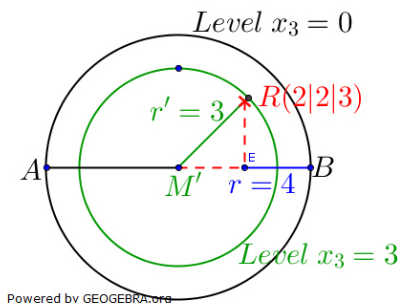


b) *Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABP:*
Zwei der Dreieckseiten müssen gleich lang sein.
Koordinaten von C und D:
Ermittlung der Punkte C und D über Vektoraddition.
Spitzen der Pyramide:
Die Spitzen der Pyramide errechnen sich über Vektoraddition und zwar aus $\overrightarrow{OP}$ zuzüglich/abzüglich 12 mal dem Einheitsvektor des Normalenvektors der Ebene, in der die Grundfläche der Pyramide liegt, nämlich $\frac{12}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E}$.

c) *Punkte auf der x_1–Achse, die zu A und B rechtwinklig sind.*
Sei $C(x_1|0|0)$ der Punkt auf der x_1–Achse, dann muss wegen Rechtwinkligkeit bei C das Skalarprodukt $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 0$ gelten.

d) *Lage des Punktes $R(2|2|3)$:*
Alternative 1: Vektorielle Lösung.
Wir stellen die Geradengleichung durch S und R auf und ermitteln deren Spurpunkt N der x_1x_2-Ebene. Ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{ON}$ kleiner als 4, liegt der Punkt innerhalb, ansonsten außerhalb des Kegels.
Alternative 2: Verwendung des 2. Strahlensatzes
Nebenstehende Abbildungen zeigen den Schnitt durch den Kegel sowie eine Draufsicht auf den Kegel.
Wir bestimmen den Radius r' des Kreises für $x_3 = 3$ über den zweiten Strahlensatz und prüfen dann, ob $\left|\overrightarrow{M'P}\right| < r'$ ist.





Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2012 BW

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) *Koordinatenform der Ebene:*

Aufpunkt von g ist identisch mit Punkt C des Dreiecks.

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ | Normalenform von E

E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$ | Koordinatenform von E

E: $\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{4} = 1$ | Achsenabschnittsform von E

$S_{x_1}(8|0|0)$; $S_{x_2}(0|4|0)$; $S_{x_3}(0|0|4)$

Für alle, die sich mit dem Kreuzprodukt nicht anfreunden können!!!

Die allgemeine Gleichung einer Ebene in Koordinatenform lautet:

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Wir machen mit den drei Punkten die Punktprobe und erhalten:

I) $6a + b = d$

II) $2a + 3b = d$

III) $3a + 2{,}5c = d$

$a = \frac{1}{8}d$; $b = \frac{1}{4}d$; $c = \frac{1}{4}d$

A]

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ef([A])

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Der Parameter d ist nun frei wählbar und wir wählen $d = 8$.

Die Ebenengleichung lautet somit:

E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$

Schnittwinkel der Ebene mit der x_1–Achse:

Die x_1–Achse hat den Richtungsvektor $\overrightarrow{rv} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und es gilt:

$$sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{rv}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 19{,}47\,°$$

Die Ebene schneidet die x_1-Achse unter einem Winkel von ca. $19{,}5\,°$.

b) *Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABP:*

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{16{,}25}$$

$$|\overrightarrow{BP}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{16{,}25}$$

Wegen $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \wedge |\overrightarrow{AP}| \neq |\overrightarrow{AB}|$ ist das Dreieck ABP gleichschenklig.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2012 BW

Koordinaten von C und D des Vierecks $ABCD$:

Wegen $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$ gilt:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wegen $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PD}$ gilt:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten sind $C(0|-1|5)$ und $D(4|-3|5)$.

Spitzen der Pyramiden über $ABCD$ mit einer Höhe von $12\,LE$.

Die Spitzen sind jeweils $12\,LE$ vom Punkt P in Richtung des Einheitsvektors des Normalenvektors der Ebene entfernt.

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OP} + \frac{12}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \frac{12}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OP} - \frac{12}{|\overrightarrow{n_E}|} \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \frac{12}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5,5 \end{pmatrix}$$

Die beiden Spitzen haben die Koordinaten $S_1(7|8|10,5)$ und $S_2(-1|-8|-5,5)$.

c) *Punkte auf der x_1–Achse, die zu A und B rechtwinklig sind.*

Der Punkt auf der x_1–Achse sei $C(x_1|0|0)$. Dann gilt wegen Rechtwinkligkeit:

$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 - x_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 - x_1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(6 - x_1) \cdot (2 - x_1) + 3 = 0$$

$$x_1{}^2 - 8x_1 + 15 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{1_1} = 5; \quad x_{1_2} = 3$$

Die Punkte $C(5|0|0)$ und $C^*(3|0|0)$ auf der x_1–Achse bilden mit der Hypothenuse AB ein rechtwinkliges Dreieck.

d) *Lage des Punktes $R(2|2|3)$:*

Alternative 1: Vektorielle Lösung (umständlich)

Geradengleichung durch S und R:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt N der Geraden g mit der x_1x_2–Ebene:

Für N als Spurpunkt gilt $x_3 = 0$.

$$12 - 9t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{4}{3}$$

$$\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{ON}| = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{2} < 4$$

Wegen $|\overrightarrow{ON}| < r$ liegt der Punkt P innerhalb des Kegels.

Alternative 2: 2. Strahlensatz (einfachste Lösung)

Nach dem 2. Strahlensatz gilt (siehe Grafik in Klausuraufschrieb):

$$\frac{r'}{r} = \frac{\overline{CM'}}{\overline{CM}}; \quad r' = r \cdot \frac{\overline{CM'}}{\overline{CM}} = 4 \cdot \frac{9}{12} = 3$$

Länge der Strecke $\overline{\mathrm{M'R}}$

$\overline{M'R} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} < 3$

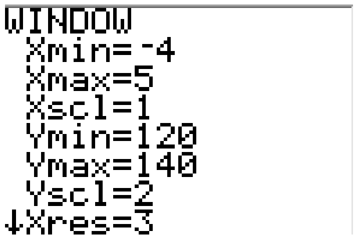
Wegen $\overline{M'R} < r'$ liegt der Punkt P innerhalb des Kegels.

Aufgabe 2

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1=$\sqrt{(72+30X)^2 + (-30+90X)^2 + (-102+30X)^2}$



a) Der Richtungsvektor von U_1 beschreibt die Bewegung pro Minute, da t in Minuten gegeben ist. Strecke in einer Minute somit $|\overrightarrow{rv_{U_1}}|$.
Die x_3–Koordinate des Richtungsvektors von U_1 ist negativ, also befindet sich das U–Boot auf Tauchfahrt.
Winkelberechnung über Formel für Schnittwinkel Gerade/Ebene.

b) U_2 benötigt $3\,min$ um von A nach B zu kommen, also ist die Geschwindigkeit $\frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{AB}|$.
Bewegungsgerade von U_2 über die Zweipunkteform aufstellen.
Die Tiefe der U-Boote wird durch die x_3-Koordinate bestimmt, also Gleichsetzung von $x_{3_{U_1}}$ und $x_{3_{U_2}}$.

c) Abstand der U-Boote zu Beobachtungsbeginn entspricht der Strecke zwischen den beiden Aufpunkten der Bewegungsgeraden von U_1 und U_2. Die kleinste Entfernung ergibt sich über die Abstandsfunktion zweier Punkte auf je einer Bewegungsgeraden. Das Minimum des Graphen der Funktion bestimmt die Lösung (per GTR).

d) Der Satellit kann nur die Erdoberfläche beobachten. Der gesuchte Schnittpunkt ist dadurch der Schnittpunkt der beiden U-Bootgeraden ohne Berücksichtigung der x_3–Ebene. Dann werden für den gefundenen Parameter t die x_3–Koordinaten (Tiefen) von U_1 und U_2 ermittelt und die Differenz gebildet.

Klausuraufschrieb

a) *Bewegung des U-Bootes U_1:*

$$\left|\begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 (-30)^2} = \sqrt{12600} \approx 112{,}25$$

U_1 legt in einer Minute ca. $112\,m$ zurück.

Bewegungsrichtung von U_1:

Die x_3–Koordinate des Richtungsvektors von U_1 ist negativ.

U_1 befindet sich auf Tauchfahrt.

Winkel zwischen Bewegungsgeraden und Meeresoberfläche:

Normalenvektor der x_1x_2–Ebene (Meeresoberfläche) ist $n_E = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{rv}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right|} = \frac{30}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{12600}}$$

$$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{30}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{12600}}\right) \approx 15{,}5\,°$$

Die Route von U_1 bildet mit der Meeresoberfläche einen Winkel von ca. 15,5 °.

b) *Geschwindigkeit von U_2:*

$$s = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}-202-68\\-405-135\\-248+68\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-270)^2 + (-540)^2 + (-180)^2} = 630$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{630}{3} \cdot \frac{m}{min} = 210\,\frac{m}{min}$$

U_2 bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $210\,m$ pro Minute.

Bewegungsgerade von U_2:

$$g_{U_2}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \frac{t}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}68\\135\\-68\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-90\\-180\\-60\end{pmatrix} \qquad \textbf{q.e.d}$$

Zeitpunkt gleicher Tiefe von U_1 und U_2:

$x_{3_{U1}} = x_{3_{U2}}$.

$-170 - 30t = -68 - 60t \quad \Rightarrow \quad t = 3{,}4$

$3{,}4\,min$ *nach Beobachtungsbeginn sind die beiden U-Boote in gleicher Tiefe.*

c) *Abstand der U-Boote bei Beobachtungsbeginn:*

Aufpunkt : $P(140|105|-170)$

$$l = |\overrightarrow{PA}| = \left|\begin{pmatrix}140-68\\105-135\\-1700+68\end{pmatrix}\right| = \sqrt{72^2 + (-30)^2 + (-72)^2} = 128{,}41$$

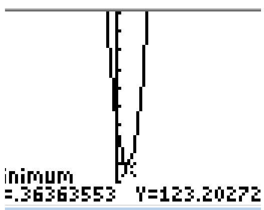
Zu Beobachtungsbeginn sind die U-Boote ca. $128\,m$ voneinander entfernt.

Kleinste Entfernung der beiden U-Boote.

Die Abstandsfunktion lautet:

$$d = \sqrt{\left(\overrightarrow{x_{U_2}} - \overrightarrow{x_{U_1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\left(\begin{pmatrix}68\\135\\-68\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-90\\-180\\-60\end{pmatrix}\right) - \left(\begin{pmatrix}140\\105\\-170\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\begin{pmatrix}-72\\30\\102\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-30\\-90\\-30\end{pmatrix}\right)^2}$$



$$d(t) = \sqrt{(72+30t)^2 + (-30+90t)^2 + (-102+30t)^2}$$

$$d(t)_{min} \overset{GTR}{\approx} 123{,}2 \text{ für } t \overset{GTR}{\approx} 0{,}363.$$

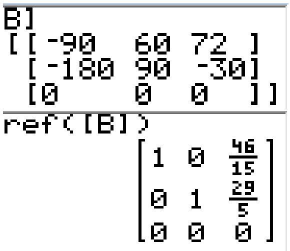
Der kleinste Abstand beträgt $123{,}2\,m$. Wegen $123{,}2 > 100$ wird der Sicherheitsabstand der beiden U-Boote voneinander eingehalten.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2012 BW

d) *Höhenunterschied der U-Bootrouten bei Satellitenbeobachtung.*

$g_{U_1} \cap g_{U_2}$ ohne Berücksichtigung von x_3:

$$t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ 0 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Das LGS ist eindeutig lösbar mit $t = \frac{46}{15}$ und $s = \frac{29}{5}$.

$x_{3_{U1}} = -170 + \frac{29}{5} \cdot (-30) = -344$

$x_{3_{U2}} = -68 + \frac{46}{15} \cdot (-60) = -252$

Der Höhenunterschied beträgt $92\ m$.