



Aufgabe B1

Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(6|0|0)$ und $R(0|0|6)$.

Gegeben ist außerdem die Ebene $E: 3x_2 + x_3 = 8$.

- a) Stellen Sie den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar. Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene E mit der x_1x_2 -Ebene einschließt. Bestimmen Sie den Abstand von E zur x_1 -Achse.
- b) Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch $E_a: 3x_2 + x_3 = a; a \in \mathbb{R}$.
Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?
Für welchen Wert von a hat der Punkt $S(6|6|6)$ den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene E_a ?
Für welche Werte von a hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel?

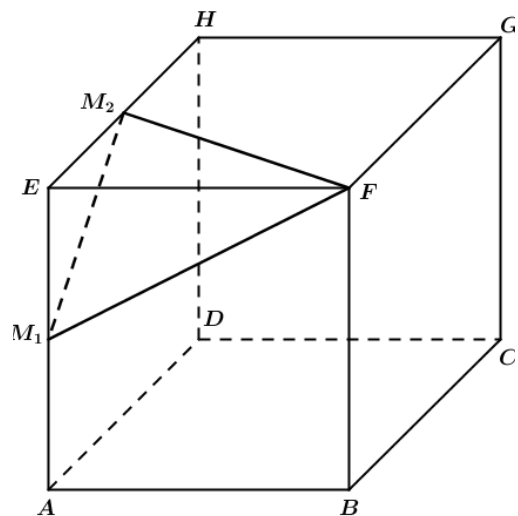
Aufgabe B2

In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).

Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.

In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $H(0|0|8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.

- a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene S , in der das Segeltuch liegt. Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. Berechnen Sie den Inhalt des Segeltuchs.
(Teilergebnis:
 $S: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$)
Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E ?
- b) Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch. In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange?



Lösung B1

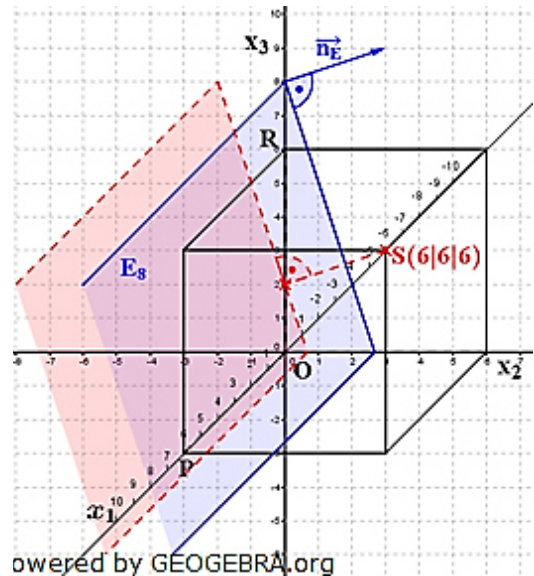
Lösungslogik

- a) Zum Einzeichnen der Ebene bilden wir die Achsenabschnittsform, um die Spurpunkte abzulesen. Die Ebene hat keine x_1 -Koordinate, somit verläuft sie parallel zur x_1 -Achse. Schnittwinkelberechnung über die Schnittwinkelbestimmung zweier Vektoren, hier \vec{n}_E und $\vec{n}_{x_1x_2}$.

Zur Abstandsberechnung der Ebene mit der x_1 -Achse bestimmen wir den Abstand vom Ursprung zur Ebene über die HNF.

- b) Die Ebenen liegen parallel zueinander, da alle E_a denselben Normalenvektor besitzen. Wir bestimmen a über den Abstand von S zu E_a über die HNF.

Die Ebenen E_a haben solange gemeinsame Punkte mit dem Würfel, solange E_a den Würfel schneidet. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass dies ab dem a gilt, für welches die Ebene E_a den Punkt O enthält, bis zu dem a , für welches die Ebene E_a den Punkt S enthält. Beide a ermitteln wir durch Punktproben von O und S mit E_a .



Klausuraufschrieb

- a) Spurpunkte zum Einzeichnen der Ebene E :

$$E: \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{8} = 1 \Rightarrow S_{x_2} \left(0 \left| \frac{8}{3} \right| 0 \right); S_{x_3} (0|0|8)$$

E hat keinen Spurpunkt mit der x_1 -Achse, E verläuft parallel zur x_1 -Achse.

Schnittwinkel von E mit x_1x_2 -Ebene:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{n}_{x_1x_2}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{x_1x_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = 71,57^\circ$$

E schneidet die x_1x_2 -Ebene unter einem Winkel von etwa $71,6^\circ$.

Abstand von E zur x_1 -Achse:

Entspricht dem Abstand von z.B. $O(0|0|0)$ zu E .

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 0 - 8|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{5} \sqrt{10}$$

E hat zur x_1 -Achse einen Abstand von $\frac{4}{5} \sqrt{10} LE$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2013 BW

b) Der Normalenvektor aller E_a ist $\vec{n}_{E_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit sind die Ebenen der

Ebenenschar zueinander parallel.

a für Abstand $\sqrt{10}$ von $S(6|6|6)$:

$$d = \sqrt{10} = \frac{|3 \cdot 6 + 6 - a|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|24 - a|}{\sqrt{10}}$$

$$|24 - a| = 10 \Rightarrow a_1 = 14; \quad a_2 = 34$$

Der Punkt $S(6|6|6)$ hat von E_{14} und von E_{34} den Abstand $\sqrt{10}$.

a für gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

Gemeinsame Punkte liegen vor, wenn die Ebene den Würfel schneidet. Die Grenze auf der linken Seite des Würfels ist die Ebene E_a , in der der Ursprung O liegt. Die Grenze auf der rechten Seite des Würfels ist die Ebene E_a , die den Punkt S enthält.

Die Ebene E_0 enthält den Ursprung.

Die Ebene E_{24} enthält den Punkt S .

Für $0 \leq a \leq 24$ hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

Lösung B2

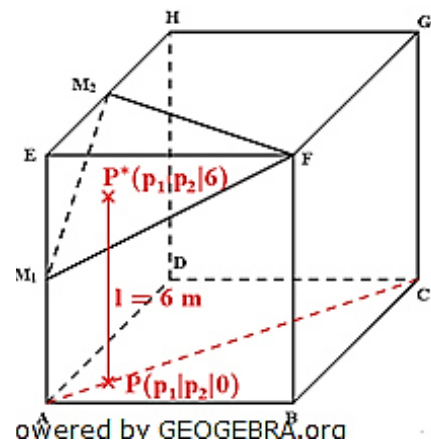
Lösungslogik

a) Wir bestimmen zunächst die Koordinaten der Punkte E , F , M_1 und M_2 . Normalenvektor $\vec{n}_S = \vec{FM}_1 \times \vec{FM}_2$ und daraus die Koordinatengleichung der Ebene mit dem Aufpunkt F .

Zwei Seiten des Dreiecks FM_1M_2 müssen gleich lang sein.

Fläche des Segeltuchs über den halben Betrag des ungekürzten Kreuzproduktes aus \vec{FM}_1 und \vec{FM}_2 .

Abstand von E zu S über die HNF.



b) Wir bestimmen die Koordinaten von P auf der Geraden durch A und C über eine Punktprobe. Wir bestimmen die Koordinaten von P^* über eine Punktprobe mit S .

Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (p_1 und p_2), über das p_1 und p_2 bestimmt werden können.

Klausuraufschrieb

a) Koordinaten der Punkte E , F , M_1 und M_2 .

$$E(8|0|8); \quad F(8|8|8); \quad M_1(8|0|4); \quad M_2(4|0|8)$$

Ebene S :

$$k \cdot \vec{n}_S = \vec{FM}_1 \times \vec{FM}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix} = (-16) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2013 BW

$$S: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad | \quad \text{Normalenform von } S$$

$$S: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24 \quad | \quad \text{Koordinatenform von } S$$

Form des Segeltuchs:

$$|\overrightarrow{FM_1}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{80}$$

$$|\overrightarrow{FM_2}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{80}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

Wegen $|\overrightarrow{FM_1}| = |\overrightarrow{FM_2}| \neq |\overrightarrow{M_1M_2}|$ ist das Dreieck FM_1M_2 gleichschenkelig.

Fläche des Segeltuchs:

$$A_{Tuch} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{FM_1} \times \overrightarrow{FM_2}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix} \right| = \frac{16}{2} \cdot \sqrt{9} = 24$$

Das Segeltuch hat eine Fläche von 24 m^2 .

Abstand des Segeltuchs von E:

$$d = \frac{|2 \cdot 8 - 0 + 2 \cdot 8 - 24|}{\sqrt{9}} = \frac{|8|}{3}$$

Der Abstand des Segeltuchs vom Punkt E beträgt $\frac{8}{3} \text{ m}$.

b) Fußpunkt der Stange:

Gerade g durch A und C:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

$P \in g$:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

$$(1) \quad p_1 = 8 + s$$

$$(2) \quad p_2 = -s \Rightarrow s = -p_2$$

$s \rightarrow (1)$

$$(1) \quad p_1 = 8 - p_2 \Rightarrow p_1 + p_2 = 8$$

$P^* \in S$:

$$(2') \quad 2p_1 - p_2 + 12 = 24$$

$$2p_1 - p_2 = 12$$

$$(1) \quad p_1 + p_2 = 8$$

Das LGS ist eindeutig lösbar für $p_1 = \frac{20}{3}$ und $p_2 = \frac{4}{3}$.

Das untere Ende der 6 m hohen Stange befindet sich im Punkt $P \left(\frac{20}{3} \mid \frac{4}{3} \mid 0 \right)$.

$$\begin{array}{l} \text{[C]} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & -1 & 12 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ \hline \text{Fref([C])} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$