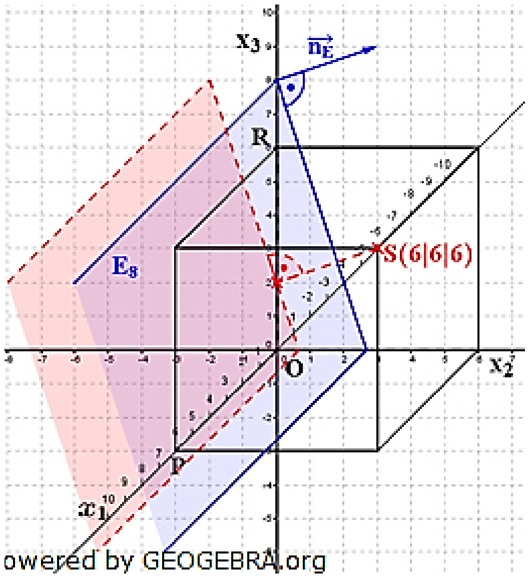
Lösung B1

Lösungslogik

a) Zum Einzeichnen der Ebene bilden wir die Achsenabschnittsform, um die Spurpunkte abzulesen. Die Ebene hat keine x_1–Koordinate, somit verläuft sie parallel zur x_1–Achse.
Schnittwinkelberechnung über die Schnittwinkelbestimmung zweier Vektoren, hier $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}}$.
Zur Abstandsberechnung der Ebene mit der x_1–Achse bestimmen wir den Abstand vom Ursprung zur Ebene über die HNF.



b) Die Ebenen liegen parallel zueinander, da alle E_a denselben Normalenvektor besitzen.
Wir bestimmen a über den Abstand von S zu E_a über die HNF.
Die Ebenen E_a haben solange gemeinsame Punkte mit dem Würfel, solange E_a den Würfel schneidet. Aus der Grafik ist ersichtlich, dass dies ab dem a gilt, für welches die Ebene E_a den Punkt O enthält, bis zu dem a, für welches die Ebene E_a den Punkt S enthält. Beide a ermitteln wir durch Punktproben von O und S mit E_a.

Klausuraufschrieb

a) *Spurpunkte zum Einzeichnen der Ebene E:*

$E\colon \frac{x_2}{\frac{8}{3}} + \frac{x_3}{8} = 1 \implies S_{x_2}\left(0\left|\frac{8}{3}\right|0\right);\quad S_{x_3}(0|0|8)$

E hat keinen Spurpunkt mit der x_1–Achse, E verläuft parallel zur x_1–Achse.

Schnittwinkel von E mit x_1x_2-Ebene:

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_1}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_1}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{10}\sqrt{10}$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) = 71{,}57\,°$

E schneidet die x_1x_2-Ebene unter einem Winkel von etwa $71{,}6\,°$.

Abstand von E zur x_1–Achse:

Entspricht dem Abstand von z.B. $O(0|0|0)$ zu E.

$d = \frac{|3 \cdot 0 + 0 - 8|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$

E hat zur x_1–Achse einen Abstand von $\frac{4}{5}\sqrt{10}\,LE$.

b) *Der Normalenvektor aller E_a ist $\overrightarrow{n_{E_a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit sind die Ebenen der Ebenenschar zueinander parallel.*

a für Abstand $\sqrt{10}$ von $S(6|6|6)$:

$d = \sqrt{10} = \frac{|3 \cdot 6 + 6 - a|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|24-a|}{\sqrt{10}}$

$|24 - a| = 10 \Longrightarrow \quad a_1 = 14; \quad a_2 = 34$

Der Punkt $S(6|6|6)$ hat von E_{14} und von E_{34} den Abstand $\sqrt{10}$.

a für gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

Gemeinsame Punkte liegen vor, wenn die Ebene den Würfel schneidet. Die Grenze auf der linken Seite des Würfels ist die Ebene E_a, in der der Ursprung O liegt. Die Grenze auf der rechten Seite des Würfels ist die Ebene E_a, die den Punkt S enthält.

Die Ebene E_0 enthält den Ursprung.

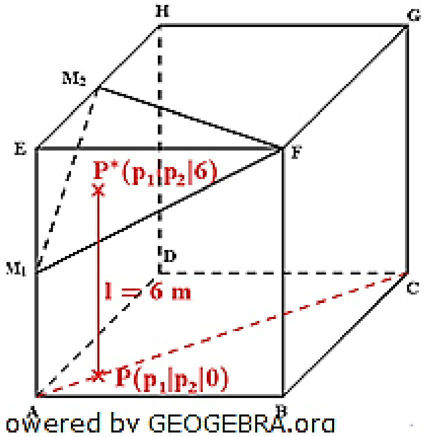
Die Ebene E_{24} enthält den Punkt S.

Für $0 \le a \le 24$ hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

Lösung B2

Lösungslogik

a) Wir bestimmen zunächst die Koordinaten der Punkte E, F, M_1 und M_2. Normalenvektor $\overrightarrow{n_S} = \overrightarrow{FM_1} \times \overrightarrow{FM_2}$ und daraus die Koordinatengleichung der Ebene mit dem Aufpunkt F.
Zwei Seiten des Dreiecks FM_1M_2 müssen gleich lang sein.
Fläche des Segeltuchs über den halben Betrag des ungekürzten Kreuzproduktes aus $\overrightarrow{FM_1}$ und $\overrightarrow{FM_2}$.
Abstand von E zu S über die HNF.



b) Wir bestimmen die Koordinaten von P auf der Geraden durch A und C über eine Punktprobe. Wir bestimmen die Koordinaten von P^* über eine Punktprobe mit S.
Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (p_1 und p_2), über das p_1 und p_2 bestimmt werden können.

Klausuraufschrieb

a) *Koordinaten der Punkte E, F, M_1 und M_2.*

$E(8|0|8); \quad F(8|8|8); \quad M_1(8|0|4); \quad M_2(4|0|8)$

Ebene S:

$$k \cdot \overrightarrow{n_S} = \overrightarrow{FM_1} \times \overrightarrow{FM_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix} = (-16) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$S\colon \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=0$ | Normalenform von S

$S\colon\ 2x_1-x_2+2x_3=24$ | Koordinatenform von S

Form des Segeltuchs:

$|\overrightarrow{FM_1}|=\left|\begin{pmatrix}0\\-8\\-4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-8)^2+(-4)^2}=\sqrt{80}$

$|\overrightarrow{FM_2}|=\left|\begin{pmatrix}-4\\-8\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2}=\sqrt{80}$

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}$

Wegen $|\overrightarrow{FM_1}|=|\overrightarrow{FM_2}|\neq|\overrightarrow{M_1M_2}|$ *ist das Dreieck* FM_1M_2 *gleichschenklig.*

Fläche des Segeltuchs:

$A_{Tuch}=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{FM_1}\times\overrightarrow{FM_2}|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-32\\16\\-32\end{pmatrix}\right|=\frac{16}{2}\cdot\sqrt{9}=24$

Das Segeltuch hat eine Fläche von $24\,m^2$*.*

Abstand des Segeltuchs von E*:*

$d=\frac{|2\cdot 8-0+2\cdot 8-24|}{\sqrt{9}}=\frac{|8|}{3}$

Der Abstand des Segeltuchs vom Punkt E *beträgt* $\frac{8}{3}\,m$*.*

b) *Fußpunkt der Stange:*

Gerade g durch A und C:

$g\colon\ \vec{x}=\overrightarrow{OA}+s\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix};\ s\in\mathbb{R}$

$P\in g$:

$\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};\ s\in\mathbb{R}$

(1) $p_1=8+s$

(2) $p_2=-s\implies\ s=-p_2$

$s\longrightarrow(1)$

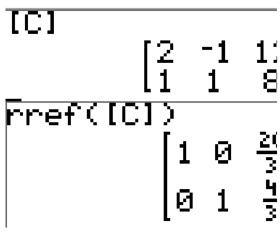
(1) $p_1=8-p_2\implies\ p_1+p_2=8$

$P^*\in S$:

(2') $2p_1-p_2+12=24$

$2p_1-p_2=12$

(1) $p_1+p_2=8$



Das LGS ist eindeutig lösbar für $p_1=\frac{20}{3}$ und $p_2=\frac{4}{3}$.

Das untere Ende der $6\,m$ hohen Stange befindet sich im Punkt $P\left(\frac{20}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|0\right)$.