Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2014 BW

Aufgabe B1

Gegeben sind die Punkte $A(5|-5|0)$, $B(5|5|0)$, $C(-5|5|0)$ und $D(-5|-5|0)$. Das Quadrat $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(0|0|12)$.

a) Die Seitenfläche BCS liegt in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Berechnen Sie den Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide eingeschlossen wird.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCS.

b) Betrachtet werden nun Quader, die jeweils vier Eckpunkte auf den Pyramidenkanten und vier Eckpunkte in der Grundfläche der Pyramide haben. Einer dieser Quader hat den Eckpunkt $Q(2{,}5|2{,}5|0)$.
Berechnen Sie sein Volumen.
Bei einem anderen Quader handelt es sich um einen Würfel.
Welche Koordinaten hat dessen Eckpunkt auf der Kante BS?

Aufgabe B2

An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten $A(10|6|0)$, $B(0|6|0)$, $C(0|0|3)$ und $D(10|0|3)$ ist im Punkt $F(5|6|0)$ ein $2\,m$ langer Stab befestigt, der in x_3-Richtung zeigt.
Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich im Punkt $L(8|10|2)$, (Koordinatenangaben in m).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt. Stellen Sie die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar. Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stab und der Platte.
(Teilergebnis: $E\colon\ x_2 + 2x_3 = 6$)

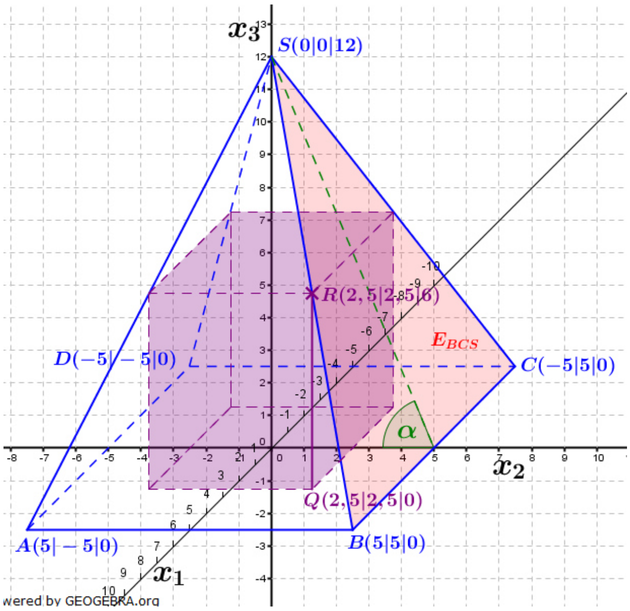
b) Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte.
Bestimmen Sie den Schattenpunkt des oberen Ende des Stabes.
Begründen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt.

c) Die Lichtquelle bewegt sich von L aus auf einer zur x_1x_2–Ebene parallelen Kreisbahn, deren Mittelpunkt das obere Ende des Stabes ist. Dabei kollidiert die Lichtquelle mit der Platte.
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte.

Lösung B1

Lösungslogik

a) Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass es sich um eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche handelt.
Koordinatengleichung BCS über das Kreuzprodukt von $\overrightarrow{BC}$ mit $\overrightarrow{BS}$ ergibt Normalenvektor und dieser zusammen mit dem Punkt B die Normalengleichung bzw. Koordinatengleichung der Ebene.
Schnittwinkelberechnung über die Schnittwinkelbestimmung der Normalenvektoren, hier $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}}$.
Fläche des Dreiecks entspricht der Hälfte des ungekürzten Betrages des Kreuzproduktes von $\overrightarrow{BC}$ mit $\overrightarrow{BS}$.



b) Da die Pyramide eine quadratische Grundfläche hat, muss auch der Quader mit dem einen Eckpunkt $Q(2{,}5|2{,}5|0)$ eine quadratische Grundfläche haben. Die Kantenlänge dieser Grundfläche ist somit $5\,LE$. Für die Höhe des Quaders benötigen wir den Betrag des Vektors $|\overrightarrow{QR}|$ (siehe Zeichnung). Hierzu schneiden wir die Gerade durch Q mit dem Richtungsvektor $\vec{r_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Geraden durch B und S.
Für den Würfel muss die Kantenlänge a der Grundfläche (des Würfels) mit dem Betrag des Vektors $|\overrightarrow{QR}| = a$ übereinstimmen. Punkt Q hat dann die Koordinaten $Q^*\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\middle|0\right)$. Wir schneiden die Gerade durch Q^* mit dem Richtungsvektor $\vec{r_v^*} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Geraden durch B und S und erhalten dadurch a. Die Koordinaten des Punktes sind dann $R^*\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\middle|a\right)$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2014 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene BCS:*

$$k\cdot\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BS}=\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\-5\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\120\\50\end{pmatrix}=10\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\ \overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}$$

$$E:\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}=0$$

$E:\ 12x_2+5x_3=60$

Schnittwinkel von E mit x_1x_2-Ebene:

$$\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\qquad\qquad \overrightarrow{n_{x_1x_2}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{n_{x_1x_1}}|}{|\overrightarrow{n_E}|\cdot|\overrightarrow{n_{x_1x_1}}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{|5|}{\sqrt{169}}=\frac{5}{13}$$

$$\alpha=cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)=67{,}38\,°$$

E schneidet die x_1x_2-Ebene unter einem Winkel von etwa $67{,}4\,°$.

Flächeninhalt Dreieck BCS:

$$A_{BCS}=0{,}5\cdot\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BS}\right|=0{,}5\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\120\\50\end{pmatrix}\right|=65$$

Das Dreieck BCS hat einen Flächeninhalt von $65\,FE$.

b) Die Pyramide hat eine quadratische Grundfläche, also muss auch der einbeschriebene Quader eine quadratische Grundfläche haben. Wegen $Q(2{,}5|2{,}5|0)$ ist die Kantenlänge des Quaders $5\,LE$. Die Höhe des Quaders entspricht der x_3–Koordinate des Schnittpunktes der Geraden durch B und S mit der senkrechten Gerade durch Q.

$$g_{BS}:\vec{x}=\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{BS}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\-5\\12\end{pmatrix}$$

$$g_{QR}:\vec{x}=\overrightarrow{OQ}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$g_{BS}\cap g_{QR}$

$$r\cdot\begin{pmatrix}-5\\-5\\12\end{pmatrix}-s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2{,}5\\-2{,}5\\0\end{pmatrix}$$

$-5r=-2{,}5\ \Rightarrow\ r=\frac{1}{2}$

$12r-s=0\Rightarrow\ s=6$

$$\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\\6\end{pmatrix}$$

$|\overrightarrow{QR}|=6$

$V_{Quader}=5\cdot5\cdot6=150$

Der Quader hat ein Volumen von $150\,VE$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2014 BW

Eckpunkt des Würfels auf der Kante BS:

$Q\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\middle|0\right)$; $R\left(\frac{a}{2}\middle|\frac{a}{2}\middle|a\right)$

$$g_{QR}: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$g_{BS} \cap g_{QR}$

$$r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} - a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} - 5 \\ \frac{a}{2} - 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-5r = \frac{a}{2} - 5 \implies r = 1 - \frac{a}{10}$$

$$12r - a = 0$$

$$12\left(1 - \frac{a}{10}\right) - a = 0$$

$$12 - 1{,}2a - a = 0$$

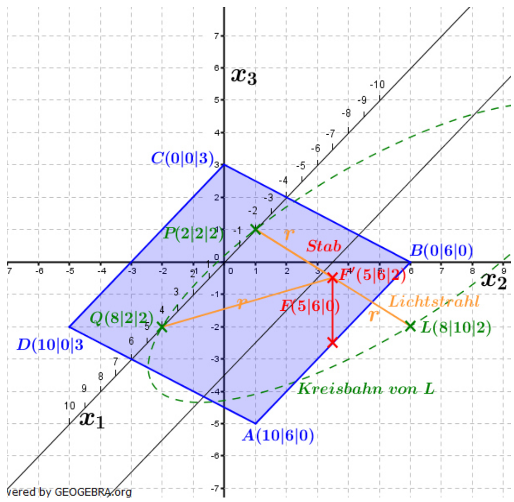
$$12 = 2{,}2a \implies a = \frac{60}{11}$$

Die Koordinaten des Eckpunktes des Würfels auf der Kante BS lauten
$R\left(\frac{30}{11}\middle|\frac{30}{11}\middle|\frac{60}{11}\right)$.

Lösung B2

Lösungslogik

a) Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$. Über den Aufpunkt A und dem Normalenvektor stellen wir die Koordinatengleichung der Ebene auf. Zeichnung siehe Grafik rechts. Der Winkel zwischen Stab und Platte ist der Schnittwinkel der Geraden durch F mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Ebene E.



b) Schatten des Stabes:
Wir müssen den Schnittpunkt der Geraden durch L und die Mastspitze mit der Ebene E ermitteln und erhalten dadurch die Koordinaten des Schattenpunktes des oberen Ende des Stabes.
Liegt dieser Schattenpunkt innerhalb der Platte und der Fußpunkt des Stabes ebenfalls, liegt der Schatten des Stabes vollständig auf der Platte. Zum schnellen Nachweis benötigen wir hier allerdings die Parametergleichung der Ebene E.

c) Der Radius der Kreisbahn entspricht der Länge zwischen dem Punkt L und der Stabspitze.
Es müssen Punkte auf der Platte existieren (in der Grafik mit P und Q bezeichnet), deren Länge zwischen der Stabspitze und den Punkten P bzw. Q dem Radius der Kreisbahn entsprechen.

<u>Klausuraufschrieb</u>

a) $k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} = 30 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E\colon\ 6 + 2 \cdot 0 = d \implies d = 6$ | Punktprobe mit A

$E\colon\ x_2 + 2x_3 = 6$ | Koordinatenform von E

Winkel zwischen dem Stab und der Platte:

$sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{r_{v_g}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{r_{v_g}}|}$ mit $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{r_{v_g}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\alpha = sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 63{,}44\,°$

Der Winkel zwischen dem Stab und der Platte beträgt ungefähr $63{,}4°$.

b) *Koordinaten des Schattenpunktes des oberen Ende des Stabes:*
Der Stab ist $2\,m$ lang. Koordinaten der Stabspitze: $F'(5|6|2)$
Gerade durch L und F':

$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LF'}$

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g \cap E$

$x_1 = 8 - 3r;\ \ x_2 = 10 - 4r;\ \ x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \longrightarrow E$

$10 - 4r + 2 \cdot 2 = 6$

$4r = 8 \implies r = 2$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der Schattenpunkt hat die Koordinaten $S(2|2|2)$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2014 BW

Nachweis, dass der Schattenpunkt auf der Platte liegt:

Parametergleichung von E:

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Punktprobe mit S:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$-10s = -8 \Longrightarrow \quad s = 0{,}8$

$-6t = -4 \Longrightarrow \quad t = \frac{2}{3}$

Wegen $0 < s; t < 1$ *liegt der Schattenpunkt der Stabspitze auf der Platte.*

Punktprobe mit F:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-10s = -5 \Longrightarrow \quad s = 0{,}5$

$-6t = 0 \Longrightarrow \quad t = 0$

Wegen $0 < s < 1 \wedge t = 0$ *liegt der Fußpunkt des Stabes auf der Plattenkante. Somit liegt der Schatten des Stabes vollständig auf der Platte.*

c) *Radius der Kreisbahn:*

$r = \left|\overrightarrow{LF'}\right| = \sqrt{9 + 16} = 5$

Die gesuchten Punkte seien $P(p_1|p_2|2)$ und $Q(q_1|q_2|2)$.

Dann gilt: $\left|\overrightarrow{PF'}\right| = \sqrt{(5 - p_1)^2 + (6 - p_2)^2} = 5$

P ist Punkt der Ebene, somit:

$p_2 + 2 \cdot 2 = 6 \Longrightarrow \quad p_2 = 2$

$p_2 \longrightarrow \left|\overrightarrow{PF'}\right|$

$\sqrt{(5 - p_1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(5 - p_1)^2 + 16} = 5 \qquad | \qquad \uparrow^2$

$(5 - p_1)^2 + 16 = 25$

$(5 - p_1)^2 = 9 \qquad | \qquad \sqrt{}$

$|5 - p_1| = 3$

$5 - p_1 = 3 \Longrightarrow \quad p_{1_1} = 2$

$5 - p_1 = -3 \Longrightarrow \quad p_{1_2} = 8$

Wegen der entstandenen quadratischen Gleichung ist $p_{1_2} = q_1$.

(Wer das nicht glaubt, kann denselben Rechenweg nochmals mit $Q(q_1|q_2|2)$ nachrechnen).

Die beiden Punkte haben die Koordinaten $P(2|2|2)$ *und* $Q(8|2|2)$.