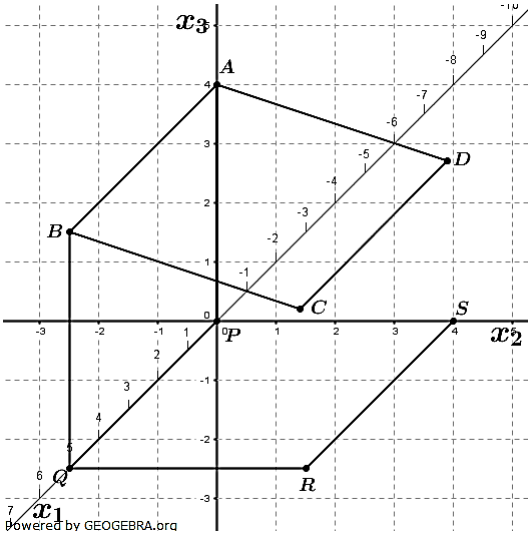
Aufgabe B1

Über einer Terrasse ist als Sonnenschutz eine Markise an einer Hauswand befestigt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $P(0|0|0)$, $Q(5|0|0)$, $S(0|4|0)$ die Eckpunkte der Terrasse dar. Die Markise wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $A(0|0|4)$, $B(5|0|4)$, $C(5|3{,}9|2{,}7)$, $D(0|3{,}9|2{,}7)$ beschrieben (alle Koordinatenangaben in Meter).

Die Lage der Hauswand wird durch die x_1x_3-Ebene beschrieben.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt.
Berechnen Sie den Winkel zwischen Markise und Hauswand.

b) In der Mitte zwischen Q und R steht eine $30\,cm$ hohe Stablampe. Am Markisenrand $\overline{CD}$ wird ein senkrecht nach unten hängender Regenschutz angebracht, der genau bis auf die Terrasse reicht. Bei starkem Wind schwingt er frei um $\overline{CD}$.
Kann der Regenschutz dabei die Stablampe berühren?
Welchen Abstand von der Hauswand darf die Stablampe auf der Terrasse höchstens haben, damit dies nicht passiert.

c) Die Sonne scheint und der Regenschutz wird entfernt. Die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird.
Die Markise kann ein- und ausgefahren werden. Dabei bewegen sich die äußeren Eckpunkte der Markise längs der Geraden $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$. Die Markise wird nun so weit eingefahren, dass der Terrassenrand zwischen Q und R genau zur Hälfte im Schatten liegt.
Bestimmen Sie die neuen Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

Aufgabe B2

Gegeben sind die Ebene E: $3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16$ und eine Geradenschar durch

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Gerade g_4 mit der Ebene E.
Welche Gerade der Schar ist orthogonal zu g_4?

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_4 und E.
Für welche Werte von a mit $-10 \leq a \leq 10$ hat der Schnittwinkel von g_a und E die Weite $10\,°$?

c) Begründen Sie, dass alle Geraden g_a in der Ebene F: $x_3 = 1$ liegen.
Es gibt eine Gerade h, die durch den Punkt $P(5|1|1)$ geht und in F liegt, aber nicht zur Schar gehört.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

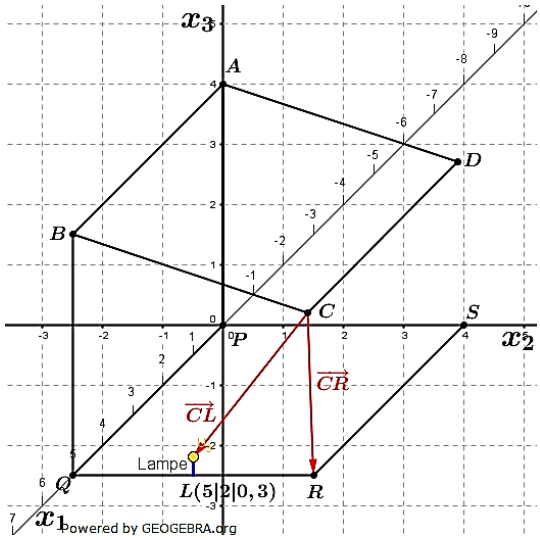
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe B1

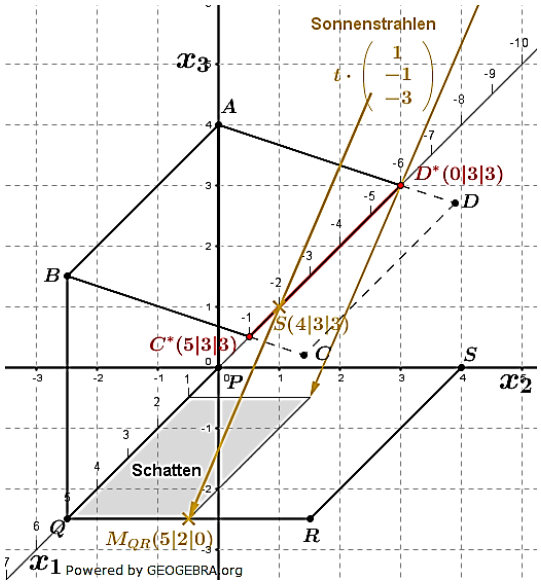
Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren z.B. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$. Zusammen mit dem Punkt A ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene E.
Winkel zwischen Markise und Hauswand:
Berechnung über den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Der Normalenvektor von E ist bereits errechnet, der Normalenvektor der x_1x_3-Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) *Berührung der Lampe:*
Wir bestimmen zunächst die Koordinaten des oberen Lampenpunktes L.
Der Punkt C liegt auf $2{,}7\,m$ Höhe. Damit ist der Regenschutz $2{,}7\,m$ lang. Er berührt dann die Lampe, wenn der Betrag des Vektors $\overrightarrow{CL}$ kleiner als $2{,}7$ ist.
Höchstabstand Lampe:
Der Abstand der Lampe von der Hauswand wird durch die x_2–Koordinate l_2 der Lampe bestimmt. Der Höchstabstand ergibt sich durch Gleichsetzung der Beträge der Vektoren $\overrightarrow{CR}$ und $\overrightarrow{CL}$, wobei die Koordinaten der Lampenspitze $L(5|l_2|0{,}3)$ sind.



c) *Begründung, dass Terrasse nicht vollständig beschattet wird:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise nach Einfahren derselben:
Der Mittelpunkt des Terrassenrandes hat die Koordinaten $M_{QR}(5|2|0)$. Einer der Sonnenstrahlen muss damit dort auftreffen. Die Markise muss soweit zurückgefahren werden, dass der Schnittpunkt S der Markisenebene E mit einer Geraden durch den Punkt M_{QR} mit Richtungsvektor des Einfallvektors der Sonnenstrahlen auf die zurückgefahrene Markisenkante C^*D^* zu liegen kommt. Hieraus lassen sich dann die Koordinaten der Markiseneckpunkte bestimmen.



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}9 \\ -1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}5 \\ 19{,}5 \end{pmatrix} = 6{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ x_2 + 3x_3 = d$ | Punktprobe mit $A(0|0|4)$

$E\colon\ 0 + 3 \cdot 4 = d \quad \Longrightarrow \quad d = 12$

$E\colon\ x_2 + 3x_3 = 12$

Schnittwinkel von E mit x_1x_3-Ebene:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_{x_1x_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_3}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{x_1x_3}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|1|}{\sqrt{10}}$$

$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) = 71{,}565\,°$

E schneidet die x_1x_3-Ebene unter einem Winkel von etwa $71{,}6\,°$.

b) *Berührung der Lampe:*

Lampenspitze $L(5|2|0{,}3)$

$|\overrightarrow{CL}| = \sqrt{(5-5)^2 + (2-3{,}9)^2 + (0{,}3-2{,}7)^2} = \sqrt{9{,}37} \approx 3{,}06$

Wegen $|\overrightarrow{CL}| > 2{,}7$ berührt der Regenschutz die Lampe nicht.

Höchstabstand Lampe:

Koordinaten der Lampenspitze sind nun $L(5|l_2|0{,}3)$

$|\overrightarrow{CL}| = \sqrt{(5-5)^2 + (l_2-3{,}9)^2 + (0{,}3-2{,}7)^2} = \sqrt{(l_2-3{,}9)^2 + 5{,}76}$

$|\overrightarrow{CL}| = 2{,}7$

$\sqrt{(l_2-3{,}9)^2 + 5{,}76} = 2{,}7$ | $\uparrow^2$

$(l_2-3{,}9)^2 + 5{,}76 = 7{,}29$ | $-5{,}76$

$(l_2-3{,}9)^2 = 1{,}53$ | $\sqrt{}$

$|l_2 - 3{,}9| = 1{,}24 \Longrightarrow l_{2_1} = 2{,}66$

$l_2 - 3{,}9 = 1{,}24 \Longrightarrow l_{2_2} = 5{,}14$

Wegen $|\overrightarrow{QR}| = 4$ entfällt die Lösung l_{2_1}.

Die Lampe darf höchstens $2{,}66\,m$ von der Hauswand entfernt sein.

c) *Begründung, dass Terrasse nicht vollständig beschattet wird:*

Die x_2–Richtung des Richtungsvektors der Sonnenstrahlen ist negativ, also gegen die Rückwand gerichtet.

Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise nach Einfahren derselben:

Mittelpunkt des Terrassenrandes ist $M_{QR}(5|2|0)$. Punkt soll im Schatten liegen, also muss Sonnenstrahl dort auftreffen.

$$g_{M_{QR}}\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$g_{M_{QR}} \cap E\colon\ x_1 = 5 + t;\ x_2 = 2 - t;\ x_3 = -3t$

$2 - t + 3 \cdot (-3t) = 12$

$-10t = 10 \Longrightarrow t = -1$

$$t \longrightarrow g_{M_{QR}}\colon \quad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

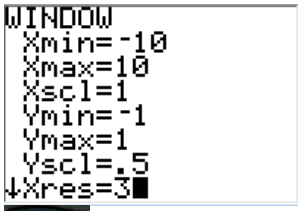
Der Sonnenstrahl schneidet die Ebene E in $S(4|3|3)$. Die Markise muss nun soweit zurückgefahren werden, dass der Punkt S auf der Kante C^*D^* zu liegen kommt. Da diese Kante parallel zur x_1–Achse verläuft (x_2- und x_3–Koordinate bleiben unverändert), ergeben sich die Koordinaten. $C^*(5|3|3)$ und $D^*(0|3|3)$.

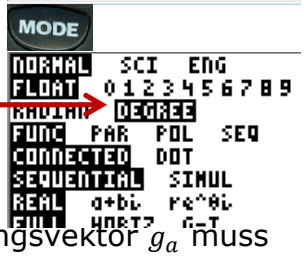
Aufgabe B2

Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

Y1$=|3X+6|/(\sqrt{X^2+1})*\sqrt{61})-sin\,(10)$





Achtung: GTR-MODE muss auf *DEGREE* stehen.

a) *Schnittpunkt von g_4 mit E:*
Wir bilden $g_4 \cap E$.
Gerade der Schar orthogonal zu g_4:
Das Skalarprodukt aus Richtungsvektors g_4 und Richtungsvektor g_a muss Null sein. Hieraus errechnet sich a.

b) *Schnittwinkel von g_4 mit E:*
Wir verwenden die Schnittwinkelformel mit $\sin(\varphi) = \cdots$ für Schnittwinkel aus Gerade und Ebene.
Werte von a für $\varphi = 10\,°$:
Es gilt: $sin(10°) = \frac{|\overrightarrow{rv_{ga}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{ga}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|}$. Lösung per GTR.

c) *Begründung alle g_a in F:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Gleichung der Geraden h:
Die Gerade h hat nach Aufgabenstellung denselben Aufpunkt wie die Geradenschar g_a. Soll h nicht zur Geradenschar gehören, so muss sie einen Richtungsvektor haben, der durch den Richtungsvektor von g_a nicht abgebildet werden kann. Dies ist z. Bsp. mit $\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ der Fall., da die x_2-Komponente von $\overrightarrow{rv_{ga}}$ nie Null werden kann.

Klausuraufschrieb

a) *Schnittpunkt von g_4 mit E:*

g_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$

$x_1 = 5 + 4t; \quad x_2 = 1 + t; \quad x_3 = 1$

$g_4 \cap E$:

$3(5+4t) + 6(1+t) + 4 \cdot 1 = 16$

$15 + 12t + 6 + 6t + 4 = 16$

$18t = -9 \quad \Longrightarrow \quad t = -0{,}5$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} - 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$

g_4 schneidet E in $S(3|0{,}5|1)$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2015 BW

Gerade der Schar orthogonal zu g_4:

$\overrightarrow{rv_{g4}} \circ \overrightarrow{rv_{ga}} = 0$

$\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

$4a + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$

Die Gerade $g_{-\frac{1}{4}}$ schneidet g_4 orthogonal in $P(5|1|1)$.

b) *Schnittwinkel von g_4 mit E:*

$$\sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_{g4}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{g4}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}}$$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}}\right) = 33{,}9841°$

Der Schnittwinkel g_4 mit E beträgt etwa $34\,°$.

Werte von a für $\varphi = 10\,°$:

$$sin(\varphi) = \frac{|\overrightarrow{rv_{g4}} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{rv_{g4}}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}} = sin\,(10°)$$

$\frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}} - sin(10°) = 0$

$a_1 = -3{,}7581; \quad a_2 = -1{,}2694$

Für $a = -3{,}8 \vee a = -1{,}3$ hat der Schnittwinkel von g_a und E die Weite $10\,°$.

c) *Begründung alle g_a in F:*

Die Ebene F mit F: $x_3 = 1$ liegt parallel zur x_1x_2–Ebene im Abstand $x_3 = 1$. Alle Geraden der Schar g_a verlaufen ebenfalls parallel zur x_1x_2–Ebene, da die x_3–Komponente des Richtungsvektors 0 ist. Der Abstand aller Geraden zur x_1x_2–Ebene ist ebenfalls 1, da die x_3–Komponente des Aufpunktes $x_3 = 1$ ist, also verlaufen alle g_a in F.

Gleichung der Geraden h in F:

Stützvektor von h: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

Richtungsvektor von : $\overrightarrow{rv_h} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ kann von $t \cdot \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$ nie abgebildet werden.

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$